LEHRBUCH

DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

BEARBEITET

VON

O. FORT UND **O. SCHLÖMILCH,**

PROFESSOREN AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU DRESDEN.

ZWEITER THEIL.

ANALYTISCHE GEOMETRIE DES RAUMES

VON

O. SCHLÖMILCH.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1855.

Vorrede zum zweiten Theile.

Bei der Ausarbeitung der analytischen Geometrie des Raumes habe ich meine Aufmerksamkeit vorzüglich auf zwei Punkte gerichtet, die gerade für ein Schulbuch — und mehr soll das vorliegende nicht sein — ihre Berechtigung haben dürften.

Um zunächst die dem Calcül der analytischen Geometrie eigenthümlichen Abstractionen möglichst anschaulich zu machen, ist die nahe Verwandtschaft der analytischen und der descriptiven Geometrie soviel als thunlich hervorgehoben worden; gern hätte ich die Analogie zwischen beiden noch weiter in's Detail verfolgt und an einer Reihe von Aufgaben den Parallelismus des analytischen und descriptiven Verfahrens nachgewiesen, wenn nicht hierdurch eine Weitläufigkeit der Exposition und ein Figurenreichthum entstanden wäre, die sich mit den engen Grenzen eines Lehrbuchs nicht vertragen. Ich musste mich daher auf eine principielle Erörterung beschränken und habe nachher nur an geeigneten Stellen jene Analogie näher berührt. Im Zusammenhange damit ist die Entwickelung der Fundamentalformeln durchaus nach einem und demselben Verfahren, nämlich durch Anwendung von Projectionen ausgeführt worden; man erhält hierdurch auch die Formeln zur Coordinatenverwandlung auf die kürzeste Weise und fast ohne Rechnung.

Zweitens habe ich in Dem, was ich gebe, nach einer gewissen Vollständigkeit gestrebt. So sind die lehrreichen, auf gerade Linien und Ebenen bezüglichen Aufgaben, welche die descriptive Geometrie sorgfältig zu behandeln pflegt, mit möglichster Ausführlichkeit und allgemein in Beziehung auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem bearbeitet, wobei sich hie

und da auch einige wissenschaftliche Ausbeute fand, wie z. B. in §. 11 die Construction der Transversalen zu vier gegebenen Geraden. — Für die Flächen zweiten Grades habe ich zwei Discussionen gegeben, die Cauchy'sche und die Plücker'sche, und zwar scheint mir letztere die nothwendige wissenschaftliche Ergänzung der ersten zu sein. Wenn es nämlich nur darauf ankommt, aus der allgemeinen Gleichung die individuellen Flächen auszulesen, so kann man sich die Sache durch Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes erleichtern und dann führt Cauchy's Betrachtung jedenfalls auf die kürzeste und eleganteste Weise zum Ziele (§§. 34 — 36); hieran schliesst sich naturgemäss die Betrachtung der einzelnen Flächen, wie sie in den §§. 37 — 41 mitgetheilt ist. Wenn aber nachher die Gleichung irgend einer Fläche zweiten Grades auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem bezogen vorkommt und rasch entschieden werden soll, welche individuelle Fläche durch dieselbe charakterisirt wird, so wäre es eine zu grosse Umständlichkeit, die Gleichung auf rechtwinklige Coordinaten zu bringen und die ganze Cauchy'sche Betrachtung zu wiederholen; hier ist es die Plücker'sche Discussion, welche durch Entwickelung leicht anwendbarer Criterien eine augenblickliche Entscheidung herbeiführt (§. 42); bei dieser Stellung lässt sich übrigens die Plücker'sche Untersuchung vereinfachen, weil man die individuellen Flächen zweiten Grades als schon bekannt voraussetzen darf.

Das letzte Capitel — die analytische Projectionslehre — ist gewissermassen nur ein Anhang zur analytischen Geometrie, hoffentlich aber Denen nicht unwillkommen, welchen daran liegt, die Ergebnisse des Calcüls in möglichst einfacher Weise graphisch darstellen zu können.

Dresden, Michaelis 1855.

O. Schlömilch.

Inhalt des zweiten Theiles.

Cap. I. Die Punkte im Raume. Seite

§. 1. Das Parallelcoordinatensystem 1
„ 2. Das rechtwinklige System und seine graphische Darstellung . . 4
„ 3. Das polare Coordinatensystem 6
„ 4. Grösse und Lage des Radiusvector 8
„ 5. Zwei Punkte im Raume 13

Cap. II. Die gerade Linie im Raume.

§. 6. Die Gleichungen der Geraden 17
„ 7. Verschiedene Bestimmungsweisen einer Geraden 23
„ 8. Zwei Gerade 25
„ 9. Gerade durch einen Punkt und zwei Gerade 28
„ 10. Transversale zu zweien und Parallele zur dritten von drei gegebenen Geraden 31
„ 11. Transversale zu vier gegebenen Geraden 33
„ 12. Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade 39
„ 13. Senkrechte zu zwei gegebenen Geraden 44

Cap. III. Die ebene Fläche.

§. 14. Die Gleichung der Ebene 48
„ 15. Bestimmung der Ebene durch drei Punkte 55
„ 16. Verschiedene Lagen eines Punktes gegen eine Ebene 57
„ 17. Die Gerade in der Ebene
(α. Ebene durch einen Punkt und eine gegebene Gerade. β. Ebene durch zwei Gerade) 59
„ 18. Parallele Lage einer Geraden gegen eine Ebene
(α. Ebene durch zwei Punkte parallel einer Geraden. β. Ebene durch eine Gerade parallel einer zweiten Geraden. γ. Ebene durch einen Punkt parallel zwei Geraden) 62
„ 19. Senkrechte Lage einer Geraden gegen eine Ebene
(α. Durch einen gegebenen Punkt eine Normalebene zu einer gegebenen Geraden zu legen. β. Senkrechte von einem Punkte auf eine Ebene) 65
„ 20. Beliebige Lage einer Geraden gegen eine Ebene 71
„ 21. Parallele Lage zweier Ebenen
(Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel einer gegebenen Ebene zu legen) 74
„ 22. Senkrechte Lage zweier Ebenen
(α. Durch zwei Punkte eine Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen. β. Durch eine gegebene Gerade eine Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen. γ. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche einer bestimmten Geraden parallel und senkrecht zu einer vorgeschriebenen Ebene ist) 76
„ 23. Ebenen in beliebigen Lagen zu einander 80

Cap. IV. Transformation der Coordinaten. Seite

§. 24. Die allgemeinen Fundamentalformeln 84
„ 25. Transformation rechtwinkliger Systeme 88
„ 26. Anderes Verfahren zur Transformation rechtwinkliger Systeme 94

Cap. V. Die Cylinderflächen.

§. 27. Entstehung und Gleichung der Cylinderflächen 102
„ 28. Der elliptische Cylinder 105

Cap. VI. Die Kegelflächen.

§. 29. Entstehung und Gleichung der Kegelflächen 110
„ 30. Der elliptische Kegel 113
„ 31. Der elliptische Kegel als schiefer Kreiskegel 119

Cap. VII. Die Umdrehungsflächen.

§. 32. Entstehung und Gleichung der Umdrehungsflächen 124
„ 33. Schnitte, Berührungsebenen und Normalen an Rotationsflächen 129

Cap. VIII. Die Flächen zweiten Grades.

§. 34. Discussion der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades. (Sehnen und Diametralebenen) 134
„ 35. Fortsetzung. (Anzahl und Lage der Hauptebenen) 140
„ 36. Schluss. (Bestimmung der individuellen Flächen zweiten Grades) 148
„ 37. Das Ellipsoid 154
„ 38. Das einfache Hyperboloid 160
„ 39. Das getheilte Hyperboloid 171
„ 40. Das elliptische Paraboloid 177
„ 41. Das hyperbolische Paraboloid 182
„ 42. Unterscheidungszeichen für die Flächen zweiten Grades . . 189
„ 43. Geometrische Oerter 201
„ 44. Tangenten, Berührungsebenen und Normalen 211
„ 45. Cubatur der Flächen zweiten Grades 218

Cap. IX. Flächen verschiedener Gattung.

§. 46. Erzeugung der Flächen durch Curven (elliptische Paraboloide, Keilflächen) 229
„ 47. Fusspunkteflächen 236
„ 48. Schraubenlinie und Schraubenfläche 239

Cap. X. Analytische Projectionslehre.

§. 49. Die axonometrische Projection 246
„ 50. Projectionen von Flächen 251
„ 51. Die perspectivische Projection 254

ANALYTISCHE GEOMETRIE

DES RAUMES.

Erstes Capitel.

Die Punkte im Raume.

---

§. 1.

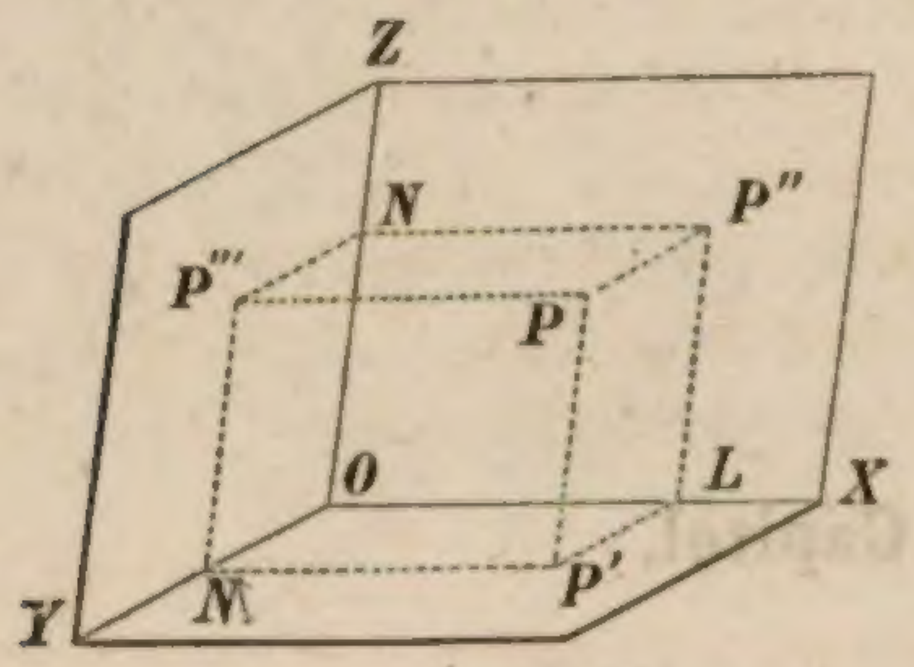
Das Parallelcoordinatensystem.

So wie man in der analytischen Geometrie der Ebene die Lage eines Punktes dadurch bestimmen kann, dass man ihn auf ein System ebener Parallelcoordinaten bezieht, so benutzt man zur Fixirung eines im Raume befindlichen Punktes ein analoges System räumlicher Parallelcoordinaten, welches auf folgende Weise zu Stande kommt.

Wir denken uns drei in einem Punkte O sich schneidende Ebenen ihrer Lage nach als fest bestimmt; der Durchschnitt der ersten und zweiten Ebene heisse OX, der Durchschnitt der ersten und dritten OY, der Durchschnitt der zweiten und dritten OZ. Die erste Ebene, welche die Geraden OX und OY enthält, nennen wir die Coordinatenebene oder Projectionsebene xy, in gleicher Weise bezeichnen wir die beiden anderen Ebenen XOZ und YOZ als die Coordinaten- oder Projectionsebenen xz und yz. Die Geraden OX, OY, OZ heissen die Coordinatenachsen und zwar OX die Achse der x, OY die der y und OZ die der z; der Punkt O, in welchem die Coordinatenachsen zusammentreffen, wird der Anfangspunkt der Coordinaten genannt, die Winkel XOY, XOZ, YOZ endlich, welche die Coordinatenachsen mit einander bilden, mögen den Namen der Coordinatenwinkel

führen und der Reihe nach mit $\angle(xy)$, $\angle(xz)$, $\angle(yz)$ bezeichnet werden.

Fig. 1.



Betrachten wir nun einen Punkt P innerhalb des von den Coordinatenebenen eingeschlossenen Raumes, so können wir seine Lage dadurch bestimmen, dass wir durch P drei den Coordinatenebenen parallele Ebenen legen und die Abschnitte angeben, welche diese neuen Ebenen auf den Coordinatenachsen bilden. Die vorhandenen sechs Ebenen schliessen nämlich ein Parallelopiped ein, dessen Kanten den Coordinatenachsen parallel laufen; die Punkte O und P sind zwei gegenüberliegende Ecken desselben; von den übrigen sechs Ecken mögen L, M, N diejenigen sein, welche der Reihe nach in den Achsen der x, der y und der z liegen, endlich P', P'', P''' diejenigen, welche der Reihe nach in die Ebenen xy, xz und yz fallen. Das fragliche Parallelopiped ist nun bestimmt und damit zugleich die Lage des Punktes P gegeben, sobald man die drei Kanten des Körpers kennt; sie werden bezeichnet durch

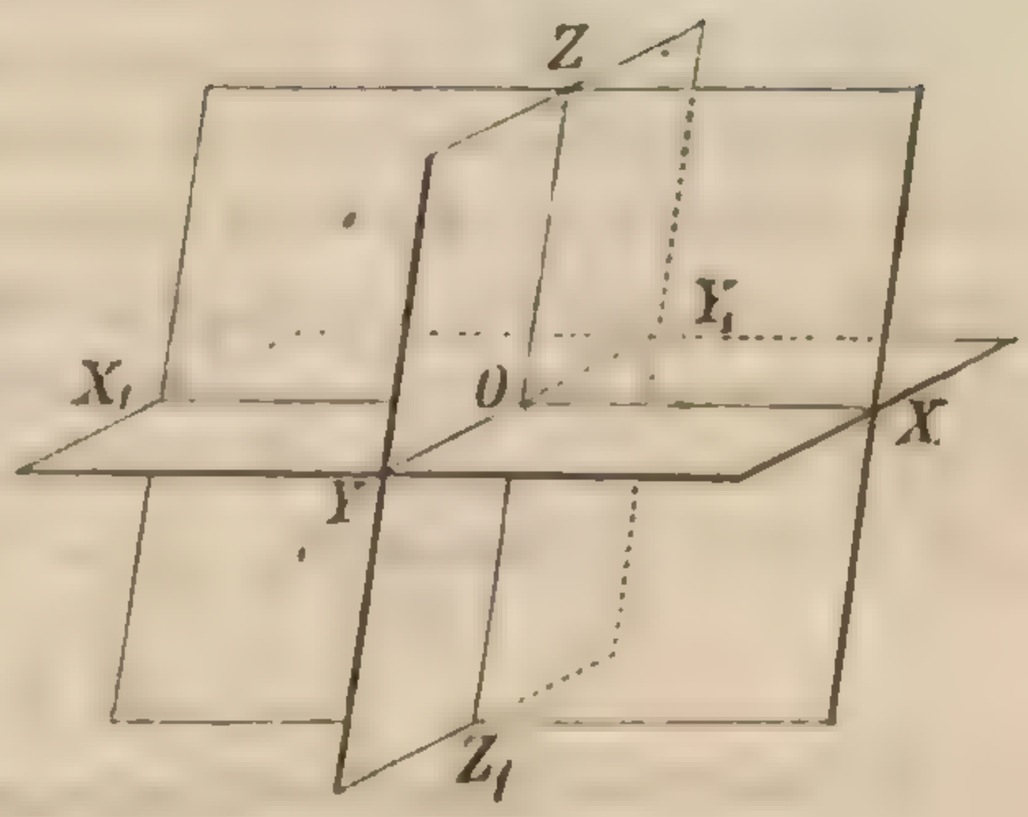
$$OL = MP' = NP'' = PP''' = x,$$
$$OM = NP''' = LP' = PP'' = y,$$
$$ON = LP'' = MP''' = PP' = z,$$

und heissen die schiefwinkligen Parallelcoordinaten (oft auch schlechtweg die Coordinaten) des Punktes P. Die in den Coordinatenebenen liegenden Eckpunkte P', P'', P''' nennt man die schiefwinkligen Projectionen des Punktes P; ihre Lagen sind durch x, y, z gleichzeitig bestimmt, denn es lassen sich $OL = x$ und $OM = y$ als die ebenen Parallelcoordinaten der Projection P' auf die Ebene xy betrachten, in gleicher Weise x und z als Coordinaten der Projection P'' auf die Ebene xz, so wie y und z als Coordinaten der Projection P''' auf die Ebene yz.

Um allgemeiner die Lage eines beliebigen nicht gerade innerhalb des Körperwinkels $OXYZ$ befindlichen Punktes zu bestimmen, denken wir uns die bisherigen Coordinatenebenen allseitig ins Unendliche erweitert, so dass auch die bisher nur nach einer Seite hin ins Unendliche fortgehenden Coordinatenachsen jetzt

nach beiden Seiten hin unendlich werden. Die erweiterten Coordinatenebenen theilen den ganzen unendlichen Raum in acht Theile, die sich als körperliche Winkel bezeichnen lassen, wenn die Rückverlängerungen von OX, OY, OZ der Reihe nach OX_1, OY_1, OZ_1 genannt werden; man hat nämlich die acht Winkelräume

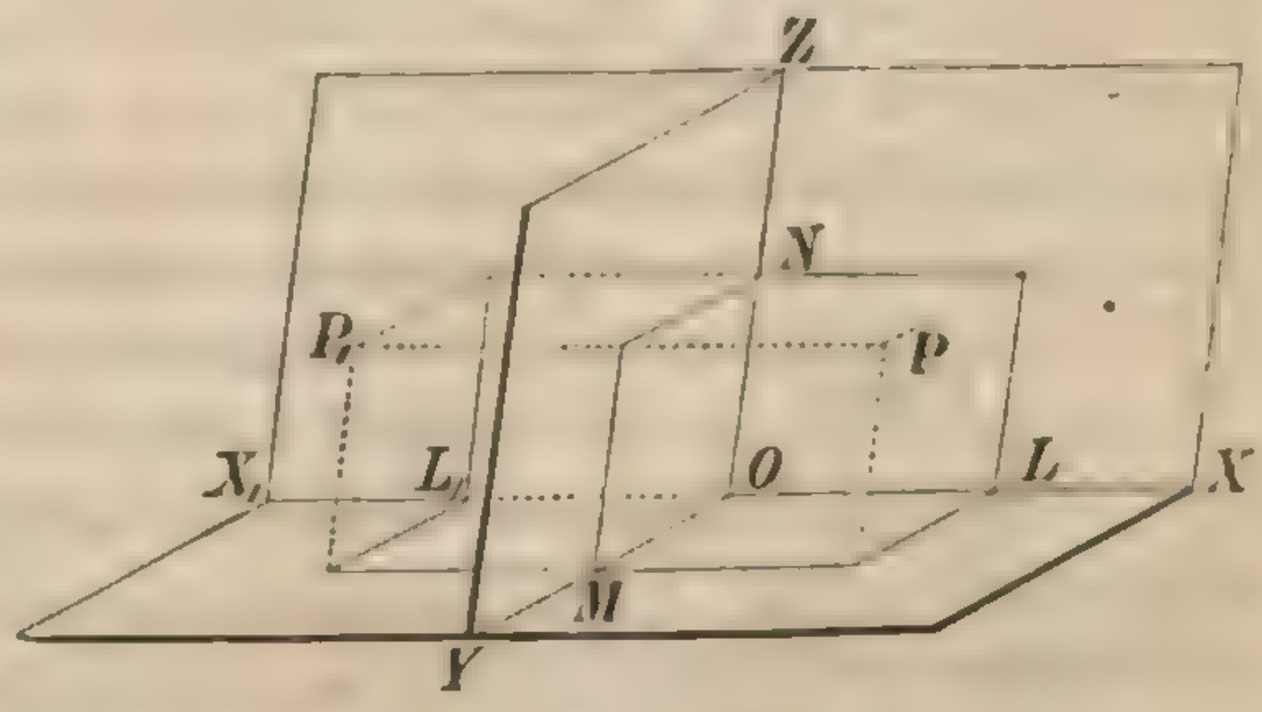
Fig. 2.



$OXYZ$,
OX_1YZ, OXY_1Z, $OXYZ_1$,
OXY_1Z_1, OX_1YZ_1, OX_1Y_1Z,
$OX_1Y_1Z_1$.

Befindet sich nun der Punkt P_1 in dem Raume OX_1YZ, so besitzt das seine Lage bestimmende Parallelopiped die Kanten OL_1, OM, ON, von denen die erste der früheren Kante OL entgegengesetzt liegt

Fig. 3.



und deshalb mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen werden muss; vorausgesetzt, dass die von O nach X hin gezählten x als positive x betrachtet werden, ist im vorliegenden Falle x negativ zu nehmen. Auf gleiche Weise entscheidet sich bei jeder anderen Lage die Wahl des Vorzeichens; wenn überhaupt die positiven x, y, z im Sinne von OX, OY, OZ genommen und die absoluten Werthe der Coordinaten immer mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet werden, so sind die Coordinaten eines Punktes

im Raume	$OXYZ$	$: x = +x_0,$	$y = +y_0,$	$z = +z_0;$
„ „	OX_1YZ	$: x = -x_0,$	$y = +y_0,$	$z = +z_0;$
„ „	OXY_1Z	$: x = +x_0,$	$y = -y_0,$	$z = +z_0;$
„ „	$OXYZ_1$	$: x = +x_0,$	$y = +y_0,$	$z = -z_0;$
„ „	OXY_1Z_1	$: x = +x_0,$	$y = -y_0,$	$z = -z_0;$

im Raume OX_1YZ_1 : $x = -x_0$, $y = +y_0$, $z = -z_0$;
„ „ OX_1Y_1Z : $x = -x_0$, $y = -y_0$, $z = +z_0$;
„ „ $OX_1Y_1Z_1$: $x = -x_0$, $y = -y_0$, $z = -z_0$.

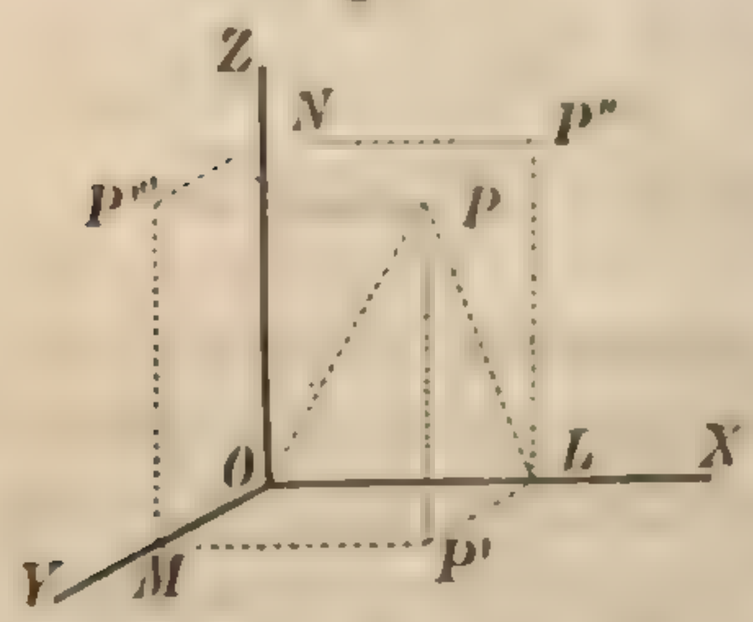
Liegt ein Punkt in einer der Coordinatenebenen, so ist eine seiner Coordinaten der Null gleich, gehört er zwei Coordinatenebenen zugleich an, d. h. liegt er auf einer der Coordinatenachsen, so verschwinden zwei seiner Coordinaten, für den Anfangspunkt der Coordinaten, der allen Coordinatenebenen zugleich angehört, gelten die Coordinaten $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$.

§. 2.

Das rechtwinklige Coordinatensystem und seine graphische Darstellung.

Wenn nicht besondere Umstände die Wahl eines schiefwinkligen Coordinatensystemes erfordern, nimmt man in der Regel die Coordinatenebenen senkrecht zu einander, wodurch auch die zwischen den Coordinatenachsen enthaltenen Winkel [$\angle(xy)$, $\angle(xz)$, $\angle(yz)$] zu rechten Winkeln werden; das so entstehende specielle System von Parallelcoordinaten heisst das **rechtwinklige** Coordinatensystem und bedarf wegen seines überaus häufigen Gebrauches einer genaueren Betrachtung.

Fig. 4.

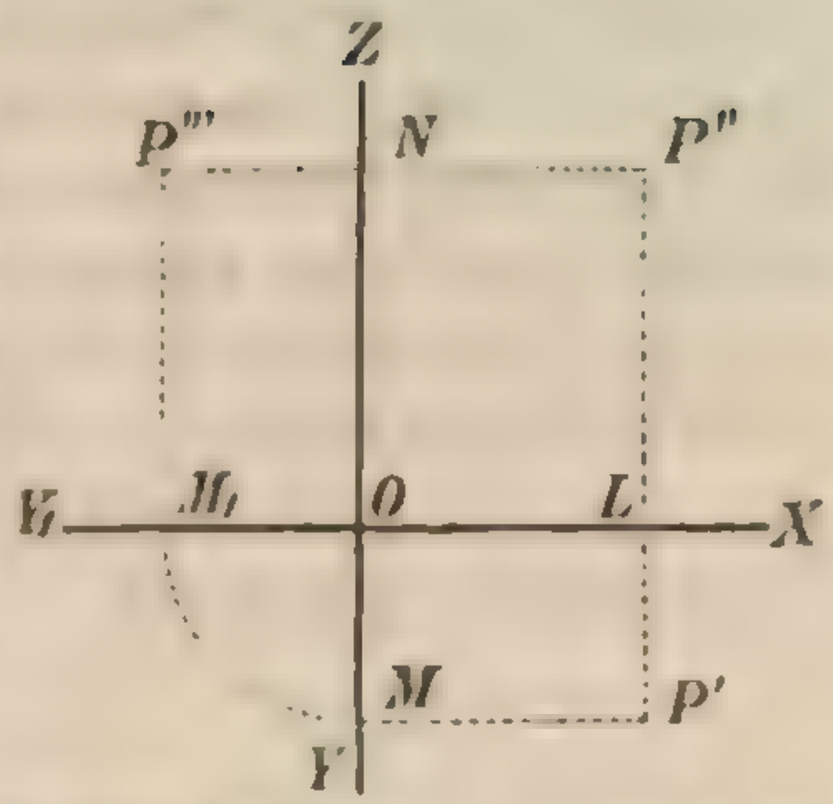


Was zunächst die Coordinaten $x = PP'''$, $y = PP''$ und $z = PP'$ anbetrifft, so stehen diese senkrecht auf den zugehörigen Coordinatenebenen, d. h. die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes sind seine **Entfernungen** von den Coordinatenebenen, und zwar ist x die Entfernung des Punktes von der Ebene yz, dem analog y seine Entfernung von der Ebene xz, endlich z seine Entfernung von der Ebene xy.

Die Projectionen P', P'', P''' des Punktes P werden jetzt zu dessen orthogonalen (oder normalen) Projectionen, denen wir in Uebereinstimmung mit der descriptiven Geometrie besondere Nennen beilegen wollen; es heisse nämlich P' die **Horizontalprojection**, P'' die **Vertikalprojection** und P''' die **seitliche** (vertikale) Projection des Punktes P. Diese Beziehungen sind leicht in einer Ebene darzustellen, wenn man die Ebene xy so

weit um die x-Achse und die Ebene yz so weit um die z-Achse gedreht denkt, bis beide Ebenen mit der Ebene xz zusammen fallen. Nehmen wir letztere zur Ebene der Zeichnung, so repräsentiren die drei neben einander liegenden Winkelräume XOY, XOZ und Y_1OZ die drei Coordinaten- oder Projectionsebenen, wobei die y-Achse in zwei verschiedenen Lagen OY und OY_1 erscheint.

Fig. 5.



Die früheren rechtwinklig zu einander und senkrecht auf der x-Achse stehenden Geraden LP' und LP'' vereinigen sich zu einer einzigen Geraden $P'P'''$, welche die x-Achse senkrecht in L schneidet; zugleich hat man die drei rechtwinkligen Coordinaten des Punktes vor sich, nämlich $OL = x$, $LP' = y$ und $LP'' = z$. Die dritte Projection P''' lässt sich übrigens leicht aus P' und P'' ableiten, wenn man berücksichtigt, dass P''' die Ecke eines aus den Seiten $OM_1 = OM = LP' = y$ und $ON = LP'' = z$ construirten Rechtecks ist; eben desswegen pflegt man bei der graphischen Darstellung der Coordinaten und Projectionen eines Punktesystemes die dritte Projection wegzulassen. Zu bemerken ist endlich noch, dass man sich die beiden übrig bleibenden Ebenen xy und xz (die horizontale und vertikale Projectionsebene) vollständig, d. h. in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung zu denken hat, dass mithin die Ebene der Zeichnung als eine aus der Aufeinanderlagerung zweier Ebenen entstandene Doppelebene zu betrachten ist. Demgemäss bedeutet der unterhalb der x-Achse liegende Theil der Zeichnung eben so wohl die Vorderseite der Horizontalebene, als die untere Hälfte der Vertikalebene, und in ähnlicher Weise enthält der oberhalb der x-Achse liegende Theil der Zeichnung eben so wohl die hintere Seite der Horizontalebene, als die obere Hälfte der Vertikalebene; demnoch kann über die Bedeutung eines Punktes kein Zweifel entstehen, wenn die in der Horizontalebene liegenden Punkte jederzeit mit einem und die der Vertikalebene angehörigen Punkte immer mit zwei Accenten bezeichnet werden.

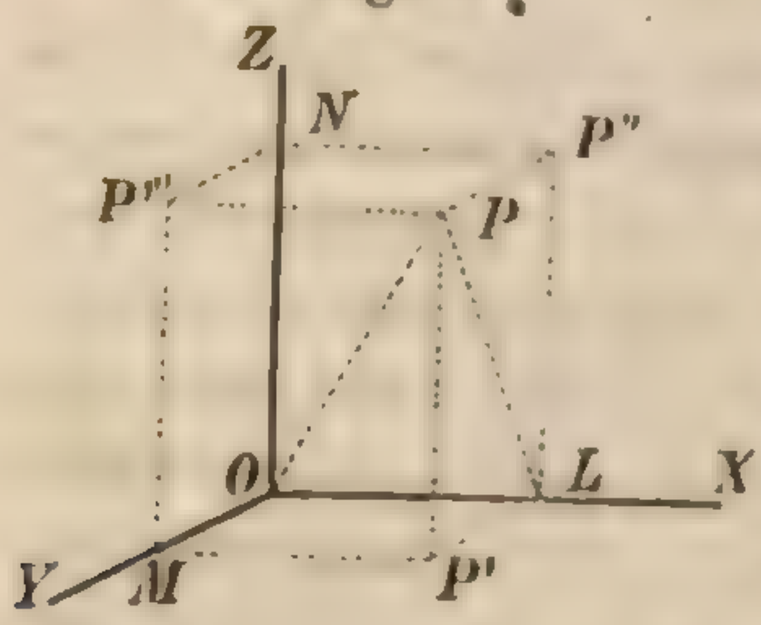
Man wird bemerken, dass diese graphische Darstellung der Coordinaten und Projectionen eines Punktes mit der in der de-

scriptiven Geometrie üblichen Auffassung zusammenstimmt. In der That sind auch beide Darstellungen nicht wesentlich verschieden, und wenn man in einer descriptiv-geometrischen Zeichnung die sogenannte Grundlinie (den Grundschnitt) als x-Achse nimmt, auf ihr einen festen Punkt O wählt und die in einer Vertikalen liegenden Projectionen P' und P'' eines Punktes durch eine Gerade verbindet, welche die x-Achse in L senkrecht schneidet, so sind $OL = x$, $LP' = y$ und $LP'' = z$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P im Raume.

§. 3.

Das polare Coordinatensystem.

Fig. 4.

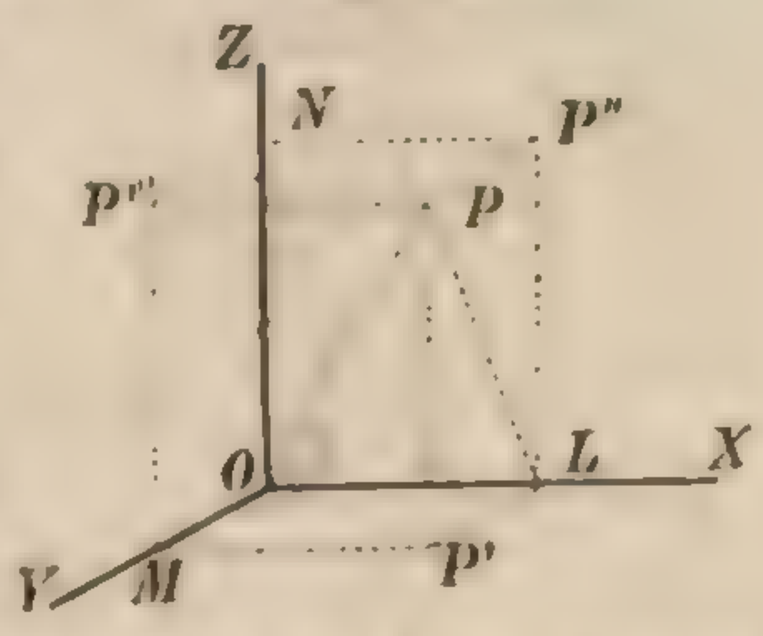


Der Punkt P, dessen Parallelcoordinaten wieder x, y und z heissen mögen, lässt sich als zur Ebene LOP gehörig betrachten und demgemäss kann seine Lage in dieser Ebene durch die ebenen Polarcoordinaten $OP = r$ und $\angle POX = \varphi$ bestimmt werden. Um ferner die Lage der veränderlichen Ebene LOP angeben zu können, muss man ihren Neigungswinkel gegen irgend eine feste Ebene in Betracht ziehen; zu letzterer wählen wir die xy-Ebene und bezeichnen den erwähnten Neigungswinkel mit ω. Die drei Grössen r, φ und ω, die sogenannten räumlichen Polarcoordinaten, bestimmen nun die Lage des Punktes P vollkommen unzweideutig, so bald man festgesetzt hat, in welcher Weise r, φ und ω gezählt werden sollen. Was zunächst ω anbelangt, so mag die positive Drehungsrichtung diejenige sein, bei welcher die positive Seite der xy-Ebene auf dem kürzesten Wege in die positive Seite der xz-Ebene überführt werden kann, für φ gehe die positive Drehungsrichtung von dem positiven Theile der x-Achse auf dem kürzesten Wege nach der positiven Seite der yz-Ebene hin; r endlich kann entweder im absoluten Sinne oder algebraisch (d. h. eben so wohl positiv als negativ) genommen werden. Gestattet man dem r keine verschiedenen Vorzeichen, so ist φ von 0^0 bis bis 180^0 und ω von 0^0 bis 360^0 zu zählen, wenn der Punkt P die Füglichkeit erhalten soll, jede beliebige Stelle des ganzen unendlichen Raumes betreten zu können, will man aber positive und

negative r zulassen (was unter Umständen nothwendig werden kann), so erhalten φ und ω den gemeinschaftlichen Spielraum von 0^0 bis 180^0.

Sehr einfach sind die Beziehungen zwischen den rechtwinkligen und polaren Coordinaten eines Punktes P; aus den Dreiecken OLP und $LP'P$, deren gleichnamige Winkel Rechte sind, ergeben sich die Formeln

Fig. 4.



$$1)\quad \begin{cases} x = r\ cos\,\varphi, \\ y = r\ sin\,\varphi\ cos\,\omega, \\ z = r\ sin\,\varphi\ sin\,\omega, \end{cases}$$

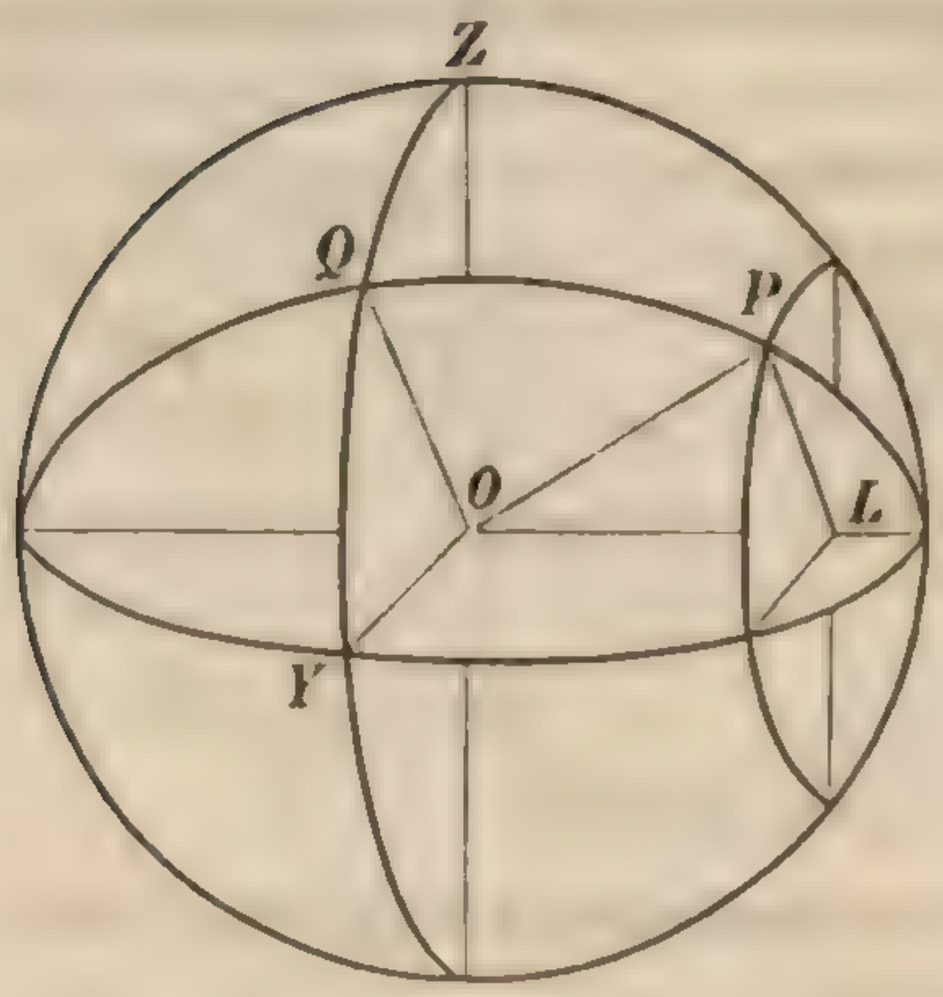
welche zum Uebergange von dem rechtwinkligen zu dem polaren Systeme dienen; umgekehrt ist

$$2)\quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ cos\,\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad tan\,\omega = \dfrac{z}{y}. \end{cases}$$

Sobald man sich hier über das Vorzeichen von r entschieden hat, finden auch φ und ω ihre unzweideutige Bestimmung, es sind nämlich immer diejenigen Werthe zu nehmen, wodurch x, y, z, nach den Formeln 1) berechnet, die Vorzeichen erhalten, welche sie thatsächlich besitzen. Wären z. B. gegeben $x = +a$, $y = -b$, $z = -c$, wo a, b, c die absoluten Werthe der Coordinaten bedeuten und wird r positiv genommen, so ist $cos\,\varphi$ positiv, mithin φ zwischen 0^0 und 90^0 enthalten; da jetzt $r\ sin\,\varphi$ positiv ausfällt, y und z aber negativ sind, so muss ω so gewählt werden, dass $cos\,\omega$ und $sin\,\omega$ zugleich negativ sind; demgemäss hat man für ω denjenigen Winkel zwischen 180^0 und 270^0 zu nehmen, dessen Tangente $= \frac{c}{b}$ ist. Dasselbe Resultat findet sich leicht geometrisch, wenn man beachtet, in welchem Octanten des Raumes der durch $x = a$, $y = -b$ und $z = -c$ bestimmte Punkt liegt.

Noch wollen wir bemerken, dass das besprochene Coordinatensystem in nahem Zusammenhange mit der geographischen Ortsbestimmung steht. Denken wir uns zunächst nur r gegeben, so ist die Lage des Punktes P noch nicht vollkommen bestimmt, vielmehr kann er beliebig auf einer mit dem Halbmesser r um den Mittelpunkt O beschriebenen Kugel liegen; es bedarf daher noch einer näheren Angabe seiner Lage auf dieser Fläche. Stellen

Fig. 6.



wir uns letztere auf die Weise entstanden vor, dass sich ein in der xy-Ebene aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser r beschriebener Halbkreis um die x-Achse gedreht hat, so ist die Ebene der xy die erste Meridianebene der Kugel und die Ebene LOP irgend eine spätere Meridianebene, deren Lage gegen die erste durch den Neigungswinkel ω bestimmt wird; letzterer ist daher nichts Anderes als die geographische Länge des Punktes P. Bei jener Drehung beschreibt ferner die y-Achse den auf der Drehungsachse senkrechten grössten Kreis, d. h. den Aequator, mithin ist $\angle\, POQ$ die geographische Breite des Punktes P und folglich φ das Complement der Breite oder die Poldistanz.

§. 4.

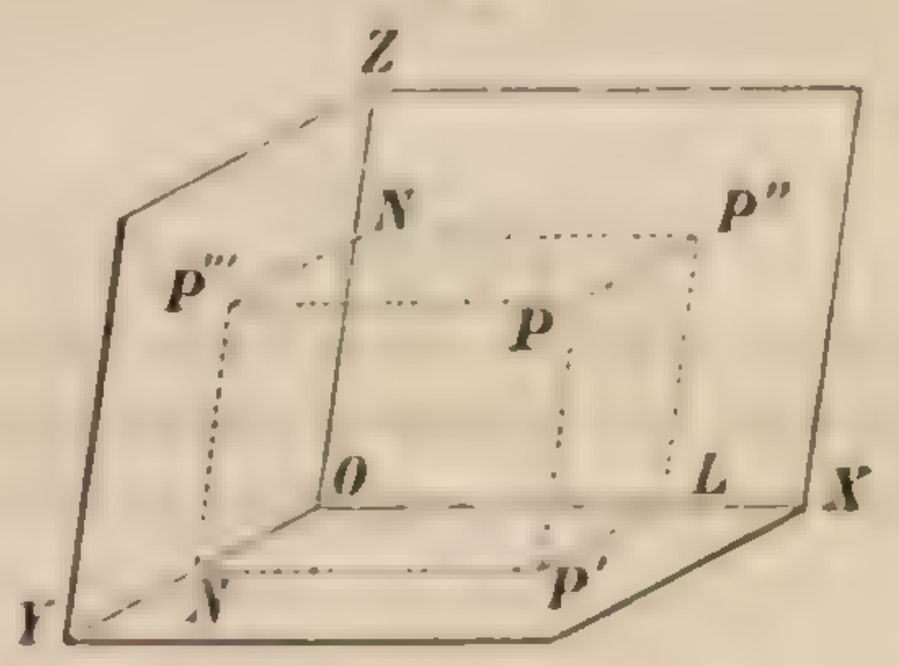
Grösse und Lage des Radiusvector.

Die Entfernung eines Punktes P vom Anfangspunkte der Coordinaten, der Radiusvector des Punktes P, ist offenbar der Grösse und Richtung nach bestimmt, sobald die Coordinaten von P gegeben sind, man kann daher die Aufgabe stellen, aus den schiefwinkligen Coordinaten x, y, z die Länge r des Radiusvector OP und die Winkel (rx), (ry), (rz) zu berechnen, welche derselbe mit den Coordinatenachsen einschliesst. Behufs der Lösung dieser Aufgabe erinnern wir an ein Paar auf rechtwinklige Projectionen bezügliche Sätze. Erstens ist bekannt, dass die rechtwinklige Projection einer begrenzten Strecke s auf eine Gerade g durch $s\ cos\ (sg)$ ausgedrückt wird, gleichgiltig, ob sich die Geraden s und g schneiden oder nicht; im letzteren Falle hat man unter $\angle\, (sg)$ den Winkel zu verstehen, den zwei durch irgend einen Punkt gehende Parallelen zu jenen Geraden mit einander

bilden würden*). Zweitens weiss man, dass die rechtwinklige Projection einer gebrochenen Linie $ABCDEF$ auf eine Gerade GH einerlei mit der Projection der Geraden AF ist, wobei die Winkel (AB, GH), (BC, GH), (CD, GH) u. s. w. immer nach einer und derselben aus der Bezeichnung von selbst ersichtlichen Drehungsrichtung gezählt werden.

Projiciren wir die aus den Strecken $OL = x$, $LP' = y$, $P'P = z$ bestehende gebrochene Linie $OLP'P$ rechtwinklig auf irgend eine Gerade g im Raume, so setzt sich die Projection aus den drei Stücken $x\ cos\ (xg)$, $y\ cos\ (yg)$, $z\ cos\ (zg)$ zusammen; die nämliche Projection muss aber auch zum Vorschein kommen, wenn die Strecke $OP = r$ auf dieselbe Gerade projicirt wird, es gilt daher die Fundamentalgleichung

Fig. 1.



$$r\ cos\ (rg) = x\ cos\ (xg) + y\ cos\ (yg) + z\ cos\ (zg).$$

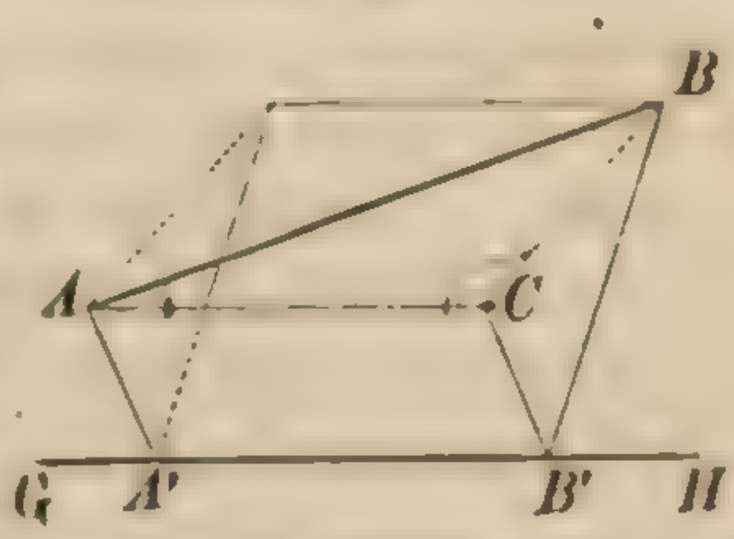
Für die willkürliche Gerade g nehmen wir der Reihe nach OX, OY, OZ und erhalten so die vier Beziehungen

$$1)\quad r = x\ cos\ (xr) + y\ cos\ (yr) + z\ cos\ (zr),$$

---

*) Wenn die beiden Geraden sich schneiden, ist der obige Satz in den Elementen der Trigonometrie unmittelbar enthalten, schneiden sie sich nicht, so erkennt man seine Richtigkeit auf folgende Weise. Die gegebene Strecke sei $AB = s$ und $GH = g$ die Gerade, auf welche sie projicirt werden soll; die Projection $A'B'$ kommt dadurch zu Stande, dass man durch A normal zu GH eine Ebene legt, welche GH in A' schneidet, und auf gleiche Weise durch B eine zu GH normale Ebene legt, welche GH in B' schneidet. Zieht man durch A parallel zu GH eine Gerade, welche der zweiten Normalebene in C begegnet, so ist $AC = A'B'$, weil beide Gerade als die Entfernung der zwei auf GH senkrechten Ebenen gelten können, ferner ist AC senkrecht zur Ebene $BB'C$, mithin $\angle\ ACB = 90°$. Hieraus folgt

Fig. 7.



$$A'B' = AC = AB\ .\ cos\ BAC = s\ cos\ (sg)$$

wie oben behauptet wurde.

$$2)\quad \begin{cases} r\cos(xr) = x + y\cos(yx) + z\cos(zx), \\ r\cos(yr) = x\cos(yx) + y + z\cos(zy), \\ r\cos(zr) = x\cos(xz) + y\cos(yz) + z \end{cases}$$

in denen ausser den bekannten Coordinatenwinkeln die vier Unbekannten r, $\angle(xr)$, $\angle(yr)$, $\angle(zr)$ vorkommen. Die erste derselben findet sich dadurch, dass man die obigen vier Gleichungen der Reihe nach mit r, x, y, z multiplicirt und die Produkte addirt; dabei heben sich die mit (xr), (yr), (zr) behafteten Glieder und es bleibt

$$3)\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + 2xz\cos(xz) + 2yz\cos(yz);$$

daraus ergiebt sich r selbst durch Ausziehung der Quadratwurzel, die hier im absoluten Sinne zu nehmen ist. Die Gleichungen 2) liefern nun die gesuchten Winkel, nämlich

$$4)\quad \begin{cases} \cos(xr) = \dfrac{x + y\cos(yx) + z\cos(zx)}{r}, \\ \cos(yr) = \dfrac{y + x\cos(xy) + z\cos(zy)}{r}, \\ \cos(zr) = \dfrac{z + x\cos(xz) + y\cos(yz)}{r}; \end{cases}$$

da r im absoluten Sinne genommen wird, so hängt das Vorzeichen jedes dieser Quotienten nur von dem Vorzeichen des Zählers ab und hiernach bestimmt sich von selbst, ob der eine oder der andere von den Winkeln (xr), (yr), (zr) spitz oder stumpf ist. Dass keiner derselben grösser als 180^0 genommen zu werden braucht, ergiebt sich aus den obigen Formeln von selbst und damit übereinstimmend auch aus einer leichten geometrischen Betrachtung.

Noch ist zu bemerken, dass die Winkel (xr), (yr), (zr) nicht unabhängig von einander sind, dass vielmehr aus zweien unter ihnen der dritte gefunden werden kann. Wäre nämlich $\angle(xr)$ gegeben, so würde die Richtung des Radiusvector nicht hinreichend bestimmt sein, derselbe könnte beliebig auf einer geraden Kegelfläche gewählt werden, die den Coordinatenanfang zur Spitze, die x-Achse zur Achse und den gegebenen $\angle(xr)$ als Winkel zwischen Achse und Seite hat; in gleicher Weise kann bei gegebenen $\angle(yr)$ der Radiusvector willkürlich auf einer geraden Kegelfläche gezogen werden, welche den Coordinatenanfang zum Mittelpunkte, die y-Achse zur Achse und $\angle(yr)$ als Winkel zwischen Seite und Achse hat. Soll nun der Radiusvector mit der

x-Achse den Winkel (xr) und gleichzeitig mit der y-Achse den Winkel (yr) einschliessen, so muss er auf beiden Kegelflächen zugleich liegen; im Allgemeinen schneiden sich letztere in zwei durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden, welche die beiden möglichen Lagen von r angeben und zugleich $\angle(zr)$ zweideutig bestimmen. Die entsprechende analytische Beziehung erhält man dadurch, dass man die Gleichungen 2) zunächst auf x, y, z reducirt und die gefundenen Werthe in die Gleichung 1) einsetzt; zur Abkürzung sei hierbei

$$5)\quad \begin{cases} cos\,(xy) = \gamma, & cos\,(xz) = \beta, & cos\,(yz) = \alpha, \\ cos\,(xr) = \xi, & cos\,(yr) = \eta, & cos\,(zr) = \zeta, \end{cases}$$

man erhält dann aus Nr. 2) die drei Ausdrücke *)

$$6)\quad \begin{cases} x = \dfrac{(1-\alpha^2)\xi - (\gamma - \alpha\beta)\eta - (\beta - \alpha\gamma)\zeta}{1 + 2\alpha\beta\gamma - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}\, r, \\ y = \dfrac{(1-\beta^2)\eta - (\alpha - \beta\gamma)\zeta - (\gamma - \alpha\beta)\xi}{1 + 2\alpha\beta\gamma - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}\, r, \\ z = \dfrac{(1-\gamma^2)\zeta - (\beta - \alpha\gamma)\xi - (\alpha - \beta\gamma)\eta}{1 + 2\alpha\beta\gamma - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}\, r, \end{cases}$$

endlich durch Substitution in Nr. 1) nach Hebung von r und Wegschaffung des Bruches

$$7)\quad \begin{cases} (1-\alpha^2)\xi^2 + (1-\beta^2)\eta^2 + (1-\gamma^2)\zeta^2 \\ -2(\alpha - \beta\gamma)\eta\zeta - 2(\beta - \alpha\gamma)\xi\zeta - 2(\gamma - \alpha\beta)\xi\eta \\ = 1 + 2\alpha\beta\gamma - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2). \end{cases}$$

Weit einfacher gestalten sich alle diese Ergebnisse bei dem rechtwinkligen Coordinatensystem, für welches $\angle(xy) = \angle(xz) =$

---

*) Die in den obigen Formeln vorkommenden Grössen

$$\alpha - \beta\gamma, \qquad \beta - \alpha\gamma, \qquad \gamma - \alpha\beta,$$
$$1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

die wir der Reihe nach α', β', γ' und δ^2 nennen wollen, lassen sich mittelst einiger Formeln der sphärischen Trigonometrie anderweit umwandeln. Betrachten wir nämlich die Coordinatenwinkel (yz), (xz), (xy) als Seitenwinkel a, b, c der von den Coordinatenebenen gebildeten körperlichen Ecke, und bezeichnen wir die gegenüber an den Kanten OX, OY, OZ liegenden Neigungswinkel mit A, B, C, so ist $\alpha' = cos\,a - cos\,b\,cos\,c$ und zufolge der Grundformel der sphärischen Trigonometrie

$$\alpha' = cos\,A\,sin\,b\,sin\,c, \quad \beta' = cos\,B\,sin\,c\,sin\,a, \quad \gamma' = cos\,C\,sin\,a\,sin\,b.$$

Aus der bekannten Formel

$$sin^2\,A = \frac{1 + 2\,cos\,a\,cos\,b\,cos\,c - cos^2\,a - cos^2\,b - cos^2\,c}{sin^2\,b\,sin^2\,c}$$

folgt weiter durch Vergleich mit dem Obigen

$\angle (yz) = 90^0$ mithin $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist; an die Stelle der Gleichungen 2) treten jetzt die folgenden

8) $r \cos(xr) = x, \quad r \cos(yr) = y, \quad r \cos(zr) = z,$

und bedeuten geometrisch, dass die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes als die normalen Projectionen seines Vectors auf die Achsen betrachtet werden können; die Formeln 3) und 4) lauten

9) $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

10) $$\begin{cases} \cos(xr) = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos(yr) = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos(zr) = \dfrac{z}{r} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \end{cases}$$

endlich ergiebt sich aus Nr. 7) die Beziehung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ oder

11) $\cos^2(xr) + \cos^2(yr) + \cos^2(zr) = 1.$

Man erhält aus letzterer, wenn die Winkel (xr), (yr), (zr) kurz mit φ, ψ und χ bezeichnet werden,

$$\cos\chi = \sqrt{1 - (\cos^2\varphi + \cos^2\psi)} = \sqrt{-\cos(\varphi - \psi)\cos(\varphi + \psi)};$$

hiernach ist $\cos\chi$ mithin auch χ unmöglich, wenn sowohl $\varphi - \psi$ als $\varphi + \psi$ weniger als 90^0 beträgt; für $\varphi + \psi = 90^0$ wird $\cos\chi = 0$ mithin χ eindeutig $= 90^0$; liegt endlich $\varphi - \psi$ im ersten und $\varphi + \psi$ im zweiten oder dritten Quadranten, so wird χ reell und zweideutig, weil die oben vorkommende Quadratwurzel eben so wohl positiv, als negativ genommen werden kann. Diese Bemerkungen sind geometrisch leicht zu verificiren, wenn man be-

---

$$\delta^2 = \sin^2 A \sin^2 b \sin^2 c$$

oder bei Ausziehung der Wurzel, welche wir im absoluten Sinne nehmen,

$$\delta = \sin A \sin b \sin c = \sin B \sin c \sin a = \sin C \sin a \sin b.$$

Zwischen den Grössen α', β', γ', δ besteht demnach die Proportion

$$\alpha' : \beta' : \gamma' : \delta = \cot A : \cot B : \cot C : 1.$$

Denken wir uns ferner von O aus auf den Achsen OX, OY, OZ drei Strecken abgeschnitten, von denen jede der Längeneinheit gleich ist, und construiren ein Parallelopiped, dessen Kanten jene Abschnitte sind, so besitzt die in der xy-Ebene liegende Basis desselben den Flächeninhalt $\sin c$, die Höhe des Paralleopiped ist $\sin b \sin A$, mithin sein Volumen $\sin c \sin b \sin A$. Man erkennt hieraus die geometrische Bedeutung des später oft wiederkehrenden Ausdrucks

$$\delta = \sqrt{1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}.$$

achtet, unter welchen Umständen die vorhin erwähnten Kegelflächen keine Gerade gemein haben, sich längs einer Geraden berühren oder schneiden.

§. 5.

Zwei Punkte im Raume.

Wenn zwei Punkte P und P_1 durch ihre Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 gegeben sind, so kann man zunächst die Formeln des vorigen Paragraphen auf jeden einzelnen Punkt anwenden, ausserdem tritt noch als neu hinzu die Frage nach der Grösse und Richtung der verbindenden Geraden $PP_1 = s$ und die Bestimmung des Winkels POP_1, den die Vectoren $OP = r$ und $OP_1 = r_1$ mit einander bilden.

Zur Beantwortung der ersten Frage denken wir uns durch P drei Gerade parallel zu den Coordinatenachsen gelegt, nämlich $PX' \parallel OX$, $PY' \parallel OY$, $PZ' \parallel OZ$ und betrachten diese Parallelen als die Achsen eines neuen Coordinatensystemes mit dem Anfangspunkte P. Nennen wir x', y', z' die Coordinaten von P_1 in Beziehung auf dieses secundäre System, so ist aus nahe liegenden Gründen

$$x' = x_1 - x, \quad y' = y_1 - y, \quad z' = z_1 - z;$$

ferner kann s als Radiusvector des Punktes P_1 rücksichtlich des neuen Systemes angesehen werden, mithin gelten jetzt alle Formeln des vorigen Paragraphen wieder, wenn s für r, und x', y', z' für x, y, z gesetzt werden. Durch nachherige Substitution der Werthe von x', y', z' gelangt man auf diese Weise zu den folgenden Formeln, in denen wieder α, β, γ zur Abkürzung für $cos\,(yz)$, $cos\,(xz)$ und $cos\,(xy)$ gebraucht worden sind:

1) $$s^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 + 2(x_1 - x)(y_1 - y)\gamma + 2(x_1 - x)(z_1 - z)\beta + 2(y_1 - y)(z_1 - z)\alpha,$$

2) $$\begin{cases} cos\,(xs) = \dfrac{x_1 - x + (y_1 - y)\gamma + (z_1 - z)\beta}{s}, \\ cos\,(ys) = \dfrac{y_1 - y + (x_1 - x)\gamma + (z_1 - z)\alpha}{s}, \\ cos\,(zs) = \dfrac{z_1 - z + (x_1 - x)\beta + (y_1 - y)\alpha}{s}. \end{cases}$$

Um zweitens $\angle POP_1 = \angle (rr_1)$ zu bestimmen, projiciren wir r rechtwinklig auf r_1 und bemerken, dass die nämliche Pro-

jection zum Vorschein kommt, wenn statt $r = OP$ die gebrochene Linie $OLP'P$ auf r_1 projicirt wird; dies giebt

$$r\cos(rr_1) = x\cos(xr_1) + y\cos(yr_1) + z\cos(zr_1),$$

hier sind noch die Werthe von $\cos(xr_1)$, $\cos(yr_1)$, $\cos(zr_1)$ einzusetzen, welche man aus den Formeln des vorigen Paragraphen unmittelbar erhält, indem man r_1 für r schreibt. Nach Division mit r findet sich auf diese Weise

$$3)\quad \left\{ \cos(rr_1) = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1 + (xy_1 + x_1y)\gamma + (xz_1 + x_1z)\beta + (yz_1 + y_1z)\alpha}{rr_1} \right.$$

worin man, wenn es nöthig ist, die Werthe

$$4)\quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\gamma + 2xz\beta + 2yz\alpha} \\ r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2x_1y_1\gamma + 2x_1z_1\beta + 2y_1z_1\alpha} \end{cases}$$

substituiren kann. Will man $\cos(rr_1)$ nicht durch die Coordinaten von P und P_1, sondern durch die Winkel darstellen, welche einerseits r, andererseits r_1 mit den Coordinatenachsen einschliessen, so setze man wieder

$$\cos(xr) = \xi, \qquad \cos(yr) = \eta, \qquad \cos(zr) = \zeta,$$
$$\cos(xr_1) = \xi_1, \qquad \cos(yr_1) = \eta_1, \qquad \cos(zr_1) = \zeta_1,$$

und drücke x, y, z durch ξ, η, ζ aus, ebenso x_1, y_1, z_1 durch ξ_1, η_1, ζ_1, wie dies die Formeln 6) des vorigen Paragraphen lehren. Bezeichnet man für den Augenblick die Grössen

$$\alpha - \beta\gamma, \qquad \beta - \alpha\gamma, \qquad \gamma - \alpha\beta$$

der Reihe nach mit α', β', γ', ferner

$$1 - \alpha^2, \qquad 1 - \beta^2, \qquad 1 - \gamma^2$$

mit α'', β'', γ'', und den Ausdruck

$$1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

mit μ, so sind die Werthe von x, y, z, x_1, y_1, z_1:

$$x = \frac{\alpha''\xi - \gamma'\eta - \beta'\zeta}{\mu} r, \qquad x_1 = \frac{\alpha''\xi_1 - \gamma'\eta_1 - \beta'\zeta_1}{\mu} r_1,$$

$$y = \frac{\beta''\eta - \alpha'\zeta - \gamma'\xi}{\mu} r, \qquad y_1 = \frac{\beta''\eta_1 - \alpha'\zeta_1 - \gamma'\xi_1}{\mu} r_1,$$

$$z = \frac{\gamma''\zeta - \beta'\xi - \alpha'\eta}{\mu} r, \qquad z_1 = \frac{\gamma''\zeta_1 - \beta'\xi_1 - \alpha'\eta_1}{\mu} r_1,$$

und diese wären in die Gleichung 3) einzusetzen. Auf gewöhnlichem Wege ausgeführt, würde diese Substitution einen äusserst weitläufigen gebrochenen Ausdruck liefern, dessen Zähler aus nicht weniger als 81 Glieder bestünde, und man würde einige

Mühe haben, die Formel in ihre einfachste Gestalt zu bringen; dagegen gelangt man durch folgende Bemerkung leicht zum Ziele. Wenn man sich die sämmtlichen in der Gleichung 3) vorkommenden Produkte xx_1, yy_1 u. s. w. nach Substitution der obigen Werthe entwickelt denkt, so erhält man nach Hebung von rr_1 einen Ausdruck von der Form

$$\cos(rr_1) = \frac{1}{\mu^2}[A\xi\xi_1 + B\eta\eta_1 + C\zeta\zeta_1 + C'\xi\eta_1 + C''\xi_1\eta + B'\xi\zeta_1 + B''\xi_1\zeta + A'\eta\zeta_1 + A''\eta_1\xi]$$

worin die Coefficienten $A, B, \ldots . C''$ nur von den Coordinatenwinkeln abhängig sind und sich bei wirklicher Ausrechnung von selbst finden würden. Die linke Seite dieser Gleichung bleibt dieselbe, wenn r und r_1 gegen einander vertauscht werden $[\angle(rr_1) = \angle(r_1r)]$, es muss folglich die rechte Seite die nämliche Eigenschaft besitzen, also ungeändert bleiben, wenn ξ mit ξ_1 und gleichzeitig η mit η_1, sowie ζ mit ζ_1 vertauscht wird; man erkennt hieraus, dass der Coefficient von $\xi\eta_1$ derselbe sein muss, wie der von $\xi_1\eta$, d. h. $C' = C''$, und dass ebenso $B' = B''$, $A' = A''$ ist; die Formel lautet hiernach

$$\cos(rr_1) = \frac{1}{\mu^2}[A\xi\xi_1 + B\eta\eta_1 + C\zeta\zeta_1 + A'(\eta\zeta_1 + \eta_1\zeta) + B'(\xi\zeta_1 + \xi_1\zeta) + C'(\xi\eta_1 + \xi_1\eta)].$$

Da die Coefficienten $A, B \ldots C'$ von der individuellen Lage der Vectoren r und r_1 unabhängig sind, so kann irgend eine specielle Richtung der letzteren zur Bestimmung von $A, B \ldots C'$ dienen; so muss z. B. in dem Falle, wo $\angle(rr_1) = 0$, also $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \eta$, $\zeta_1 = \zeta$ wird, diejenige Gleichung zum Vorschein kommen, welche jederzeit zwischen den Grössen ξ, η, ζ besteht (Nr. 7 im vorigen Paragraphen). Nun giebt die obige Formel bei dieser Specialisirung

$$1 = \frac{1}{\mu^2}[A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2A'\eta\zeta + 2B'\xi\zeta + 2C'\xi\eta]$$

und wenn man diese mit der erwähnten Beziehung, nämlich

$$1 = \frac{1}{\mu}[\alpha''\xi^2 + \beta''\eta^2 + \gamma''\zeta^2 - 2\alpha'\eta\zeta - 2\beta'\xi\zeta - 2\gamma'\xi\eta]$$

zusammenhält, so ergeben sich die Werthe

$$A = \alpha''\mu, \quad B = \beta''\mu, \quad C = \gamma''\mu,$$
$$A' = -\alpha'\mu, \quad B' = -\beta'\mu, \quad C' = -\gamma'\mu;$$

die gesuchte Formel lautet demnach

$$\cos(r r_1) = \frac{1}{\mu}\,[\alpha''\,\xi\xi_1 + \beta''\,\eta\eta_1 + \gamma''\,\zeta\zeta_1 - \alpha'\,(\eta\zeta_1 + \eta_1\zeta) - \beta'\,(\xi\zeta_1 + \xi_1\zeta) - \gamma'\,(\xi\eta_1 + \xi_1\eta)]$$

oder auch vermöge der Bedeutungen von $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ und μ,

$$5)\quad \begin{cases} (1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)\,\cos(r r_1) \\ = (1 - \alpha^2)\,\xi\xi_1 + (1 - \beta^2)\,\eta\eta_1 + (1 - \gamma^2)\,\zeta\zeta_1 \\ - (\alpha - \beta\gamma)\,(\eta\zeta_1 + \eta_1\zeta) - (\beta - \alpha\gamma)\,(\xi\zeta_1 + \xi_1\zeta) \\ - (\gamma - \alpha\beta)\,(\xi\eta_1 + \xi_1\eta). \end{cases}$$

Für rechtwinklige Coordinaten hat man weit einfacher

$$6)\quad s = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$$

$$7)\quad \begin{cases} \cos(x s) = \dfrac{x_1 - x}{s} = \dfrac{x_1 - x}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}}, \\ \cos(y s) = \dfrac{y_1 - y}{s} = \dfrac{y_1 - y}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}}, \\ \cos(z s) = \dfrac{z_1 - z}{s} = \dfrac{z_1 - z}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}}; \end{cases}$$

ferner aus Nr. 3)

$$8)\quad \cos(r r_1) = \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r r_1}$$

endlich als speciellen Fall von Nr. 5)

$$\cos(r r_1) = \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1$$

oder ohne Gebrauch der Abkürzungen

$$9)\quad \begin{cases} \cos(r r_1) = \\ \cos(x r)\,\cos(x r_1) + \cos(y r)\,\cos(y r_1) + \cos(z r)\,\cos(z r_1). \end{cases}$$

Die Verbindung mehrerer Punkte im Raume, z. B. ein räumliches Polygon, kann immer als successive Verbindung von je zwei Punkten aufgefasst werden, es liegt daher keine Veranlassung vor, die obigen Betrachtungen auf mehr als zwei Punkte auszudehnen.

Zweites Capitel.

Die gerade Linie im Raume.

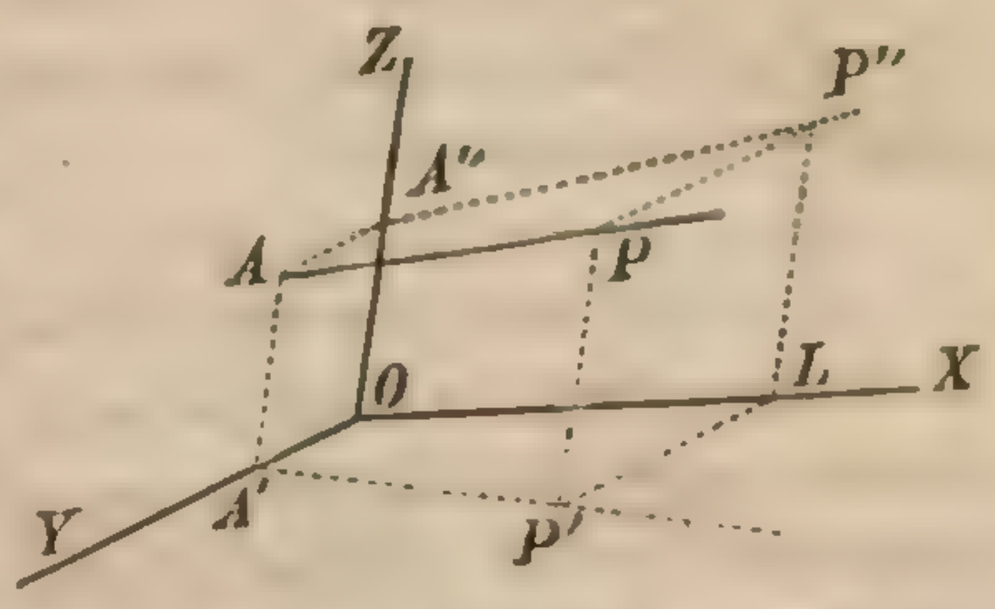
---

§. 6.

Die Gleichungen der Geraden.

Wenn ein Punkt P, dessen schiefwinklige Projectionen auf die Coordinatenebenen durch die Coordinaten x und y, x und z, y und z bestimmt sind, seine Lage im Raume ändert, so bewegen sich auch seine Projectionen, und wenn P die gerade oder krumme Linie s durchläuft, so beschreiben die Projectionen P', P'', P''' gerade oder krumme Linien, welche wir der Reihe nach mit s', s'', s''' bezeichnen und die Projectionen der Linie s nennen. Erinnert man sich nun, dass bereits durch zwei Projectionen eines Punktes die drei Coordinaten desselben gegeben sind und damit zugleich die übrige dritte Projection bestimmt ist, so übersieht sich leicht, dass aus zweien der Projectionen s', s'', s''' die dritte abgeleitet werden kann; dass mithin die räumliche Curve s durch irgend zwei ihrer Projectionen bestimmt wird. Sind z. B. die Projectionen s' und s'' gegeben, so lege man durch einen beliebigen Punkt L der x-Achse eine Ebene parallel der yz-Ebene; die genannte Hilfsebene schneidet die Linie s' in einem Punkte P', ebenso s'' in einem Punkte P''; diese Punkte sind die Projectionen des Punktes P im Raume, welchen man dadurch erhält, dass man in der Hilfsebene das Parallelogramm $LP'PP''$ aus den bekannten Seiten $LP' = y$ und

Fig. 8.



$LP'' = z$ construirt; giebt man nun der willkürlichen Entfernung $OL = x$ alle möglichen Werthe, so erhält man auf diese Weise alle möglichen Punkte der Linie s. Ganz ähnlich wäre das Verfahren, wenn zwei andere Projectionen von s als gegeben angesehen würden. Diese geometrische Betrachtung, die namentlich für den Fall eines rechtwinkligen Coordinatensystemes mit der descriptiv-geometrischen Auffassung völlig übereinstimmt, ist leicht analytisch auszudrücken, indem man beachtet, dass die ebene Linie s' durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten $OL = x$ und $LP' = y$ irgend eines ihrer Punkte P', ebenso die Linie s'' durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten $OL = x$ und $LP'' = z$ charakterisirt wird; eine Linie im Raume ist demnach bestimmt durch zwei Gleichungen zwischen je zwei Coordinaten eines beliebigen Punktes von ihr, und zwar bedeutet eine Gleichung zwischen x und y die Gleichung ihrer Projection auf die xy-Ebene, eine Gleichung zwischen x und z die Gleichung ihrer Projection auf die xz-Ebene, endlich eine Gleichung zwischen y und z die Gleichung ihrer Projection auf die yz-Ebene. Eliminirt man x aus den beiden ersten Gleichungen, so muss man die letzte erhalten, ebenso könnte man aus den Gleichungen zweier anderen Projectionen die Gleichung der noch übrigen Projection ableiten.

Um diese allgemeinen Erörterungen auf die Gerade im Raume anzuwenden, bedarf es nur der Bemerkung, dass in diesem Falle sämmtliche Projectionen gerade Linien sind; denkt man sich demnach die Gerade durch ihre Projectionen auf die xy und xz-Ebene bestimmt, wie es künftig in Uebereinstimmung der descriptiven Geometrie meistentheils geschehen wird, so sind die Gleichungen ihrer Projectionen oder, wie man kurz zu sagen pflegt, die Gleichungen der Geraden:

$$1) \qquad y = Bx + b, \qquad z = Cx + c.$$

Aus der analytischen Geometrie der Ebene kennt man die Bedeutung der vier Constanten B, b, C, c; es ist nämlich, wenn s' die Projection der Geraden auf die xy-Ebene und s'' ihre Projection auf die xz-Ebene bezeichnet:

$$2) \qquad \frac{B \sin(xy)}{1 + B\cos(xy)} = \tan(s'x), \qquad \frac{C \sin(xz)}{1 + C\cos(xz)} = \tan(s''x);$$

ferner sind b und c die Abschnitte OA' und OA'', welche die Projectionen s' und s'' auf den Achsen der y und der z bilden oder

auch die Coordinaten des Punktes A, in welchem die Gerade die yz-Ebene schneidet. Nennen wir in Uebereinstimmung mit der descriptiven Geometrie die Durchschnitte einer Geraden mit den Projectionsebenen die Spuren der Geraden, so können wir b und c kurz als die Coordinaten der yz-Spur unserer Geraden bezeichnen. Nicht überflüssig ist hierbei die Bemerkung, dass die Coefficienten B und C die Richtungen der Projectionen, mithin auch die Richtung der Geraden im Raume bestimmen, während b und c den Punkt der yz-Ebene angeben, durch welchen die Gerade geht; lässt man demnach B und C ungeändert, giebt aber b und c andere und andere Werthe, so erhält man die Gleichungen eines Systemes paralleler Geraden; nimmt man umgekehrt b und c constant, dagegen für B und C der Reihe nach verschiedene Werthe, so hat man die Gleichungen von Geraden, welche zusammen einen Strahlenbüschel ausmachen, dessen Mittelpunkt in der yz-Ebene liegt.

Ganz ähnlich gestaltet sich die Sache, wenn die Gerade durch zwei andere Projectionen bestimmt wird; wählt man hierzu die Projectionen auf die yx und yz-Ebenen, so sind die Gleichungen

$$3) \qquad x = A_1 y + a_1, \qquad z = C_1 y + c_1,$$

wo a_1 und c_1 die Coordinaten der xz-Spur bedeuten; endlich hat man zur Bestimmung der Geraden durch ihre Projectionen auf die Ebenen xz und yz

$$4) \qquad x = A_2 z + a_2, \qquad y = B_2 z + b_2,$$

wo a_2 und b_2 die Coordinaten der xy-Spur sind.

Wie sich nach dem Eingangs Gesagten von selbst versteht, können aus einem der Gleichungensysteme 1), 3) und 4) die beiden anderen hergeleitet werden; gehen wir von den Gleichungen 1) aus, weil sie der descriptiv-geometrischen Anschauungsweise am nächsten liegen, so können wir zunächst x durch y ausdrücken und den gefundenen Werth in die für z geltende Gleichung substituiren; wir haben so

$$x = \frac{1}{B}\, y - \frac{b}{B}, \qquad z = \frac{C}{B}\, y + c - \frac{bC}{B};$$

aus der Vergleichung mit Nr. 3) erhalten wir für die Coefficienten A_1, C_1 die Werthe

$$A_1 = \frac{1}{B}, \qquad C_1 = \frac{C}{B},$$

und für die Coordinaten der xz-Spur:

5) $a_1 = -\frac{b}{B}, \qquad c_1 = c - \frac{bC}{B} = \frac{cB - bC}{B}.$

Auf analoge Weise bilden wir aus den Gleichungen 1) die folgenden

$$x = \frac{1}{C}z - \frac{c}{C}, \qquad y = \frac{B}{C}z + b - \frac{cB}{C}$$

und erhalten durch Vergleichung mit Nr. 4)

$$A_2 = \frac{1}{C}, \qquad B_2 = \frac{B}{C}$$

sowie für die Coordinaten der xy-Spur:

6) $a_2 = -\frac{c}{C}, \qquad b_2 = b - \frac{cB}{C} = \frac{bC - cB}{C}.$

Die vorigen allgemeinen Formeln erleiden in dem Falle eine Modification, wo die Gerade einer oder zweien der Coordinatenebenen parallel liegt. Ist sie parallel zur xy-Ebene, wie z. B. die Gerade DE, so sind ihre Projectionen auf die Ebenen xz und yz parallel zu den Achsen der x, resp. y, und es gelten dann die Beziehungen

Fig. 8*.

$$y = Bx + b, \qquad z = c,$$

wo $OB = CD = b$ und $OC = EA = c$. Symetrischer gestaltet sich die erste Gleichung, wenn man den Abschnitt $CE = OA$ in Rechnung bringt; für $OA = a$ hat man nämlich

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad z = c$$

als Gleichungen jener Geraden. Der Punkt ac ist die xz-Spur und der Punkt bc die yz-Spur der Geraden, die xy-Spur fällt ins Unendliche; eben deswegen würden sich in diesem Falle die Gleichungen der Geraden nicht unter der Form von Nr. 4) darstellen lassen. Für eine der xz-Ebene parallele Gerade, wie z. B. DF, hat man in entsprechender Weise die Gleichungen

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1, \qquad y = b,$$

wo ab die xy-Spur und cb die yz-Spur ist; eine der yz-Ebene parallele Gerade, wie z. B. EF, wird dargestellt durch die Gleichungen

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad x = a,$$

ihre xy und ihre xz-Spuren sind die Punkte ab und ac.

Ist die Gerade zweien der Coordinatenebenen zugleich, d. h. einer der Coordinatenachsen parrallel, so vereinfachen sich die obigen Gleichungen noch weiter. So hat man für die Gerade $DG \parallel OX$

$$y = b, \qquad z = c, \quad (x \text{ beliebig})$$

und der Punkt bc ist die einzige in diesem Falle vorhandene Spur; eine Parallele zur y-Achse (z. B. EG) wird in gleicher Weise durch

$$x = a, \qquad z = c$$

charakterisirt, eine Parallele zur z-Achse (FG) durch

$$x = a, \qquad y = b.$$

Daran schliesst sich die Bemerkung, dass von den drei Gleichungspaaren

$$y = 0 \text{ und } z = 0,$$
$$x = 0 \text{ „ } z = 0,$$
$$x = 0 \text{ „ } y = 0,$$

das erste die x-Achse, das zweite die y-Achse und das dritte die z-Achse bezeichnet.

Bei einem rechtwinkligen Coordinatensystem vereinfachen sich nur die Formeln, in denen die Coordinatenwinkel vorkommen; aus Nr. 2) z. B. wird

$$B = tan\,(s'x), \qquad C = tan\,(s''x)$$

und ähnlich lauten die Werthe von A_1 und C_1 in Nr. 3), sowie die von A_2 und B_2 in Nr. 4).

Die bisher entwickelten Formeln geben die Winkel, welche die Projectionen der Geraden mit den Achsen einschliessen, nicht aber die Winkel, welche die Gerade selbst mit den Achsen blidet. Um letztere zu finden, denken wir uns durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine Parallele zu der gegebenen Geraden gelegt und auf dieser vom Anfangspunkte der Coordinaten aus eine beliebige Strecke r abgeschnitten, deren Endpunkt die Coordinaten x, y, z besitzen möge. Die Winkel (sx), (sy), (sz), welche die ursprüngliche Gerade mit den Achsen bildet, sind nun einerlei mit den Winkeln (rx), (ry), (rz) und diese lassen sich nach §. 4 bestimmen; man hat unmittelbar

$$\cos(sx) = \cos(rx) = \frac{x + y\cos(yx) + z\cos(zx)}{r},$$

$$\cos(sy) = \cos(ry) = \frac{y + x\cos(xy) + z\cos(zy)}{r},$$

$$\cos(sz) = \cos(rz) = \frac{z + x\cos(xz) + y\cos(yz)}{r},$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + 2xz\cos(xz) + 2yz\cos(yz).$$

Hier ist nur noch die Bedingung hinzuzufügen, dass die Strecke r parallel der Geraden s durch den Coordinatenanfang geht; nun sind überhaupt die Gleichungen einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden

$$y = B_1 x, \qquad z = C_1 x,$$

und wenn diese der ursprünglichen Geraden parallel liegen soll, so müssen, wie schon erwähnt, die Projectionen parallel sein, also die Bedingungen

$$B_1 = B \text{ und } C_1 = C$$

statt finden, so dass die gesuchten Gleichungen lauten

$$y = Bx \text{ und } z = Cx.$$

Nach Substitution dieser Werthe gehen die vorhin aufgestellten Formeln in die folgenden über

$$7)\quad \begin{cases} \cos(sx) = \dfrac{1 + B\cos(yx) + C\cos(zx)}{D}, \\ \cos(sy) = \dfrac{B + \cos(xy) + C\cos(zy)}{D}, \\ \cos(sz) = \dfrac{C + \cos(xz) + B\cos(yz)}{D}, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$8)\quad D = \sqrt{1 + B^2 + C^2 + 2B\cos(xy) + 2C\cos(xz) + 2BC\cos(yz)}.$$

Für rechtwinklige Coordinaten hat man einfacher

$$9)\quad \begin{cases} \cos(sx) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + B^2 + C^2}}, \\ \cos(sy) = \dfrac{B}{\sqrt{1 + B^2 + C^2}}, \\ \cos(sz) = \dfrac{C}{\sqrt{1 + B^2 + C^2}}, \end{cases}$$

woraus u. A.

$$B = \frac{\cos(sy)}{\cos(sx)}, \qquad C = \frac{\cos(sz)}{\cos(sx)}.$$

Man kann diese Werthe in die Gleichungen der Geraden einsetzen, wenn man unmittelbar die Winkel zwischen ihr und den Achsen in Rechnung bringen will; für $\angle(sx) = \alpha$, $\angle(sy) = \beta$, $\angle(sz) = \gamma$ erhält man so

$$10) \quad y = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}x + b, \qquad z = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}x + c$$

als Gleichung einer Geraden, welche in der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtung durch den Punkt bc der yz-Ebene geht. Sollte die Gerade, statt durch den Punkt bc, allgemeiner durch irgend einen gegebenen Punkt fgh des Raumes gehen, so müssen b und c so gewählt werden, dass

$$g = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}f + b, \qquad h = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}f + c;$$

man findet hieraus die Werthe von b und c, sowie nachher als Gleichungen der Geraden

$$11) \quad y - g = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x - f), \qquad z - h = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x - f).$$

Dies ist eine namentlich in der analytischen Mechanik häufig gebrauchte Form der Gleichungen einer Geraden.

§. 7.

Verschiedene Bestimmungsweisen einer Geraden.

I. Parallele zu einer gegebenen Geraden. Wenn durch einen gegebenen Punkt fgh eine Parallele zu einer gegebenen mittelst der Gleichungen

$$1) \qquad y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

bestimmten Geraden gelegt werden soll, so bezeichne man die Gleichungen der gesuchten Geraden vorläufig durch

$$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

und bestimme die vier Unbekannten B_1, b_1, C_1, c_1 aus den geforderten Bedingungen. Einerseits hat man, weil die Gerade durch den gegebenen Punkt gehen soll

$$g = B_1 f + b_1, \qquad h = C_1 f + c_1,$$

andererseits wegen der parallelen Lage beider Geraden

$$B_1 = B \text{ und } C_1 = C.$$

Entwickelt man aus diesen vier Gleichungen die Werthe der vier Unbekannten, so folgt durch deren Substitution in Nr. 1)

2) $y = Bx + g - Bf, \qquad z = Cx + h - Cf.$

oder in symmetrischerer Form:

3) $y - g = B(x - f), \qquad z - h = C(x - f).$

Dies gilt für jedes beliebiges Coordinatensystem; beim rechtwinkligen System kommt man auf die Gleichungen 11) des vorigen Paragraphen zurück, wenn man B und C durch die Winkel ausdrückt, welche die gegebene Gerade mit den Coordinatenachsen einschliesst.

II. Gerade durch zwei Punkte. Bezeichnen wir mit

4) $y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$

die Gleichungen der gesuchten Geraden, welche durch die gegebenen Punkte $f_1 g_1 h_1$ und $f_2 g_2 h_2$ geht, so sind die vier Unbekannten B, b, C, c mittelst der folgenden vier Gleichungen zu bestimmen

$$g_1 = Bf_1 + b, \qquad h_1 = Cf_1 + c,$$
$$g_2 = Bf_2 + b, \qquad h_2 = Cf_2 + c,$$

welche die analytischen Ausdrücke der angegebenen Bedingungen sind. Man findet ohne Mühe

$$B = \frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1}, \quad b = \frac{f_2 g_1 - f_1 g_2}{f_2 - f_1},$$
$$C = \frac{h_2 - h_1}{f_2 - f_1}, \quad c = \frac{f_2 h_1 - f_1 h_2}{f_2 - f_1},$$

und folglich sind die Gleichungen der gesuchten Geraden

5) $y = \frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1} x + \frac{f_2 g_1 - f_1 g_2}{f_2 - f_1}, \quad z = \frac{h_2 - h_1}{f_2 - f_1} x + \frac{f_2 h_1 - f_1 h_2}{f_2 - f_1};$

dieselben drücken, einzeln betrachtet, den unmittelbar einleuchtenden Satz aus, dass die Projectionen der gesuchten Geraden durch die gleichnamigen Projectionen der gegebenen Punkte gehen.

Je nach Bedürfniss kann man den Gleichungen 5) noch andere Formen ertheilen, z. B.

$$y - g_1 = \frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1}(x - f_1), \quad z - h_1 = \frac{h_2 - h_1}{f_2 - f_1}(x - f_1),$$

oder

$$y - g_2 = \frac{g_1 - g_2}{f_1 - f_2}(x - f_2), \quad z - h_2 = \frac{h_1 - h_2}{f_1 - f_2}(x - f_2)$$

und am elegantesten

6) $$\frac{y - g_1}{y - g_2} = \frac{x - f_1}{x - f_2}, \qquad \frac{z - h_1}{z - h_2} = \frac{x - f_1}{x - f_2}.$$

Die vorstehenden Gleichungen lehren auch die Relationen kennen, welche zwischen den Coordinaten dreier Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$ und $f_3 g_3 h_3$ statt finden müssen, wenn diese in einer geraden

Linie liegen sollen. Hierzu ist nämlich erforderlich, dass der dritte Punkt auf der durch die beiden ersten Punkte gehenden Geraden liege, dass also seine Coordinaten den Gleichungen 6) genügen; die fragliche Bedingung ist demnach in den beiden Gleichungen

$$7) \qquad \frac{g_3 - g_1}{g_3 - g_2} = \frac{f_3 - f_1}{f_3 - f_1}, \qquad \frac{h_3 - h_1}{h_3 - h_2} = \frac{f_3 - f_1}{f_3 - f_2}$$

enthalten, welche geometrisch bedeuten, dass im vorliegenden Falle die gleichnamigen Projectionen der drei Punkte in je einer Geraden liegen müssen.

§. 8.

Zwei Gerade.

Wenn zwei Gerade im Raume, deren Gleichungen

$$1) \qquad y = Bx + b, \qquad z = Cx + c,$$

$$2) \qquad y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1,$$

sein mögen, nicht parallel laufen, so können sie sich entweder schneiden oder an einander vorbeigehen, ohne irgend einen Punkt gemein zu haben. Um diese Fälle analytisch zu sondern, bestimmen wir zunächst die Durchschnitte der gleichnamigen Projectionen beider Geraden; aus den Gleichungen

$$y = Bx + b \text{ und } y = B_1 x + b_1$$

finden wir als Coordinaten x' und y' des Durchschnittes der Projectionen auf die xy-Ebene

$$3) \qquad x' = -\frac{b_1 - b}{B_1 - B}, \qquad y' = \frac{bB_1 - b_1 B}{B_1 - B},$$

ebenso folgt aus den Gleichungen

$$z = Cx + c \text{ und } z = C_1 x + c_1,$$

dass sich die Projectionen auf die xz-Ebene in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten sind:

$$4) \qquad x'' = -\frac{c_1 - c}{C_1 - C}, \qquad z'' = \frac{cC_1 - c_1 C}{C_1 - C}.$$

Wenn nun die beiden Geraden im Raume einen Punkt S als wirklichen Durchschnitt gemein haben, so müssen die Projectionen S' und S'' desselben mit den Durchschnitten der gleichnamigen Projectionen der Geraden zusammenfallen, d. h. x' und y' müssen die Coordinaten von S' und ebenso x'', z'' die Coordinaten von S' sein; dies ist aber nur möglich für $x' = x''$ und so ergiebt sich als Bedingung für das Vorhandensein eines Durchschnittes die Gleichung

5) $$\frac{b_1 - b}{B_1 - B} = \frac{c_1 - c}{C_1 - C} \text{ oder } \frac{b_1 - b}{c_1 - c} = \frac{B_1 - B}{C_1 - C}$$

oder auch

6) $$(b_1 - b)(C_1 - C) = (c_1 - c)(B_1 - B).$$

Ist eine dieser drei Gleichungen erfüllt, so hat man für die Coordinaten des Durchschnittes, welche in diesem Falle x', y', z' heissen mögen, die Werthe

7) $$\begin{cases} x' = -\frac{b_1 - b}{B_1 - B} = -\frac{c_1 - c}{C_1 - C}, \\ y' = \frac{b B_1 - b_1 B}{B_1 - B}, \quad z' = \frac{c C_1 - c_1 C}{C_1 - C}; \end{cases}$$

im entgegengesetzten Falle kann nur von den Durchschnitten der Projectionen die Rede sein und die Formeln in 3) und 4) bestehen dann ohne weiteren Zusammenhang unter einander.

Bei zwei parallelen Geraden ist $B_1 = B$, $C_1 = C$ und mithin die Gleichung 6) erfüllt, die Formeln 7) geben $x' = \infty$, $y' = \infty$, $z' = \infty$ und sprechen den bekannten Satz aus, dass zwei Parallelen einen unendlich fernen Punkt gemein haben. Um diesen Fall mit dem vorigen in einen Ausdruck zusammenzufassen, sagen wir: zwei Gerade liegen in einer und derselben Ebene oder nicht, je nach dem die Gleichung

$$(b_1 - b)(C_1 - C) = (c_1 - c)(B_1 - B)$$

erfüllt oder nicht erfüllt ist; im ersten Falle haben sie einen Punkt gemein, der eben sowohl in endlicher als in unendlicher Entfernung liegen kann, im zweiten Falle besitzen die Geraden keinen gemeinschaftlichen Punkt.

Einige Aufmerksamkeit verdient noch der Fall, wenn die eine der gegebenen Geraden parallel zu einer oder zweien der Coordinatenebenen liegt. Ist die bisher durch

$$y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

charakterisirte Gerade, welche kurz s heissen möge, parallel zur xy-Ebene, so hat man in den vorigen Formeln einfach $C = 0$ zu nehmen; ist sie parallel zur xz-Ebene, so wird dagegen $B = 0$. Etwas anders gestaltet sich die Sache, wenn s der yz-Ebene parallel liegt; die Gleichungen von s sind dann

$$x = a, \qquad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

und sie liefern, mit den Gleichungen 2) zusammen auf einen und denselben Punkt $x'y'z'$ angewendet, die Bedingung

8) $$\frac{B_1 a + b_1}{b} + \frac{C_1 a + c_1}{c} = 1.$$

Liegt die Gerade s parallel zur x-Achse, so ist $B = C = 0$, mithin nach 5)

9) $$\frac{b - b_1}{B_1} = \frac{c - c_1}{C_1} \text{ oder } \frac{b - b_1}{c - c_1} = \frac{B_1}{C_1};$$

verglichen mit der yz-Projection von s_1, d. h. mit der Geraden

$$\frac{y - b_1}{B_1} = \frac{z - c_1}{C_1}$$

giebt die obige Bedingung 9) zu erkennen, dass ein Durchschnitt von s und s_1 nur dann existirt, wenn die yz-Projection von s_1 durch die yz-Spur von s geht. Ist ferner s parallel der y-Achse, so sind die Gleichungen von s

$$x = a, \qquad z = c;$$

mit den Gleichungen 2) zusammen auf einen und denselben Punkt $x' y' z'$ angewendet, liefern sie die Bedingung

10) $$c = C_1 a + c_1,$$

welche geometrisch bedeutet, dass die xz-Projection von s_1 durch die xz-Spur von s gehen muss. Wäre endlich s parallel der z-Achse, mithin

$$x = a, \qquad y = b,$$

so würde sich durch ähnliche Schlüsse die Bedingung

11) $$b = B_1 a + b_1$$

ergeben, welche sagt, dass die xy-Projection von s_1 durch die gleichnamige Spur von s gehen muss.

Es bleibt nun noch der Winkel zu bestimmen, welchen die Geraden jedenfalls mit einander bilden, sie mögen sich schneiden oder nicht. Zu diesem Zwecke legen wir durch den Anfangspunkt der Coordinaten Parallelen zu den gegebenen Geraden; die Gleichungen dieser Parallelen sind

$$y = Bx, \quad z = Cx; \quad y = B_1 x, \quad z = C_1 x;$$

wir nennen ferner r die Strecke vom Anfangspunkte der Coordinaten bis zu dem auf der ersten Parallelen liegenden Punkte xyz, ebenso r_1 die Strecke vom Coordinatenanfang bis zu einem auf der zweiten Parallelen willkürlich gewählten Punkte $x_1 y_1 z_1$, dessen Coordinaten den Gleichungen

$$y_1 = B_1 x_1, \qquad z_1 = C_1 x_1$$

genügen müssen, und bestimmen den Winkel $(r r_1)$, welcher der gesuchte Winkel ist. Nach §. 5 haben wir

$$\left\{\frac{\begin{array}{c}\cos(rr_1) = \\ xx_1 + yy_1 + zz_1 + (xy_1 + x_1y)\gamma + (xz_1 + x_1z)\beta + (yz_1 + y_1z)\alpha\end{array}}{rr_1}\right.$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\cos(xy) = \gamma, \qquad \cos(xz) = \beta, \qquad \cos(yz) = \alpha,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\gamma + 2xz\beta + 2yz\alpha},$$

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2x_1y_1\gamma + 2x_1z_1\beta + 2y_1z_1\alpha};$$

durch Substitution der Werthe $y = Bx$, $z = Cx$, $y_1 = B_1x_1$, $z_1 = C_1x_1$ folgt hieraus

$$12)\quad \left\{\frac{\begin{array}{c}\cos(rr_1) = \\ 1 + BB_1 + CC_1 + (B + B_1)\gamma + (C + C_1)\beta + (BC_1 + B_1C)\alpha\end{array}}{DD_1}\right.$$

wobei, wie früher, zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$13)\quad \begin{cases} D = \sqrt{1 + B^2 + C^2 + 2B\gamma + 2C\beta + 2BC\alpha}, \\ D_1 = \sqrt{1 + B_1^2 + C_1^2 + 2B_1\gamma + 2C_1\beta + 2B_1C_1\alpha}. \end{cases}$$

Für rechtwinklige Coordinaten vereinfacht sich diese Formel zur nachstehenden

$$14)\quad \cos(rr_1) = \frac{1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(1 + B^2 + C^2)(1 + B_1^2 + C_1^2)}}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich u. A. auch die Bedingung, welcher die Coefficienten B, C, B_1, C_1 genügen müssen, wenn die gegebenen Geraden einen rechten Winkel mit einander bilden sollen (wobei sie sich eben sowohl rechtwinklig schneiden als kreuzen können); man hat nämlich für diesen Fall $\cos(rr_1) = 0$, mithin bei einem beliebigen Coordinatensysteme

$$15)\quad \left\{\begin{array}{c} 1 + BB_1 + CC_1 + (B + B_1)\cos(xy) \\ + (C + C_1)\cos(xz) + (BC_1 + B_1C)\cos(yz) \end{array}\right\} = 0,$$

und bei einem rechtwinkligen Coordinatensystem

$$16)\qquad 1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

An die bisher entwickelte Theorie der Geraden im Raume knüpft sich eine Reihe wichtiger Aufgaben, deren Lösung uns zunächst beschäftigen wird.

§. 9.

Gerade durch einen Punkt und zwei Gerade.

Wie aus den Elementen der Stereometrie bekannt ist, lässt sich durch einen gegebenen Punkt immer eine Gerade so ziehen, dass sie zwei bestimmte nicht in einer Ebene liegende Gerade

schneidet; um dieselbe Aufgabe analytisch zu lösen, bezeichnen wir den gegebenen Punkt mit fgh und nennen

$$1) \quad \begin{cases} y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2 \end{cases}$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, sowie

$$2) \quad y = Px + p, \qquad z = Qx + q$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden. Die Bedingung, dass letztere durch den Punkt fgh gehen soll, wird durch die Gleichungen

$$3) \quad g = Pf + p, \qquad h = Qf + q$$

ausgedrückt; die zweite Bedingung, dass die gesuchte Gerade jede der beiden gegebenen Geraden schneiden soll, liefert die Gleichungen

$$4) \quad \frac{p - b_1}{q - c_1} = \frac{P - B_1}{Q - C_1}, \qquad \frac{p - b_2}{q - c_2} = \frac{P - B_2}{Q - C_2},$$

und so hat man zusammen vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten P, p, Q, q. Substituirt man die aus Nr. 3) gezogenen Werthe

$$5) \quad p = g - Pf, \qquad q = h - Qf$$

in die Gleichungen 4), so ergeben sich nach Wegschaffung der Brüche die neuen Gleichungen

$$(C_1 f + c_1 - h) P - (B_1 f + b_1 - g) Q = B_1 (c_1 - h) - C_1 (b_1 - g),$$
$$(C_2 f + c_2 - h) P - (B_2 f + b_2 - g) Q = B_2 (c_2 - h) - C_2 (b_2 - g),$$

woraus P und Q leicht zu entwickeln sind. Zur Abkürzung sei

$$B_1 (c_1 - h) - C_1 (b_1 - g) = k_1, \quad B_2 (c_2 - h) - C_2 (b_2 - g) = k_2,$$
$$B_1 f + b_1 - g = m_1, \quad B_2 f + b_2 - g = m_2,$$
$$C_1 f + c_1 - h = n_1, \quad C_2 f + c_2 - h = n_2;$$

die Werthe von P und Q sind dann folgende:

$$P = \frac{k_2 m_1 - k_1 m_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}, \quad Q = \frac{k_2 n_1 - k_1 n_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1};$$

hieraus finden sich p und q nach Nr. 5) und schliesslich sind die Gleichungen der verlangten Geraden

$$6) \quad y - g = \frac{k_2 m_1 - k_1 m_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1} (x - f), \quad z - h = \frac{k_2 n_1 - k_1 n_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1} (k - f).$$

Für die Coordinaten der Durchschnitte dieser Geraden mit den gegebenen Geraden findet man nach §. 8

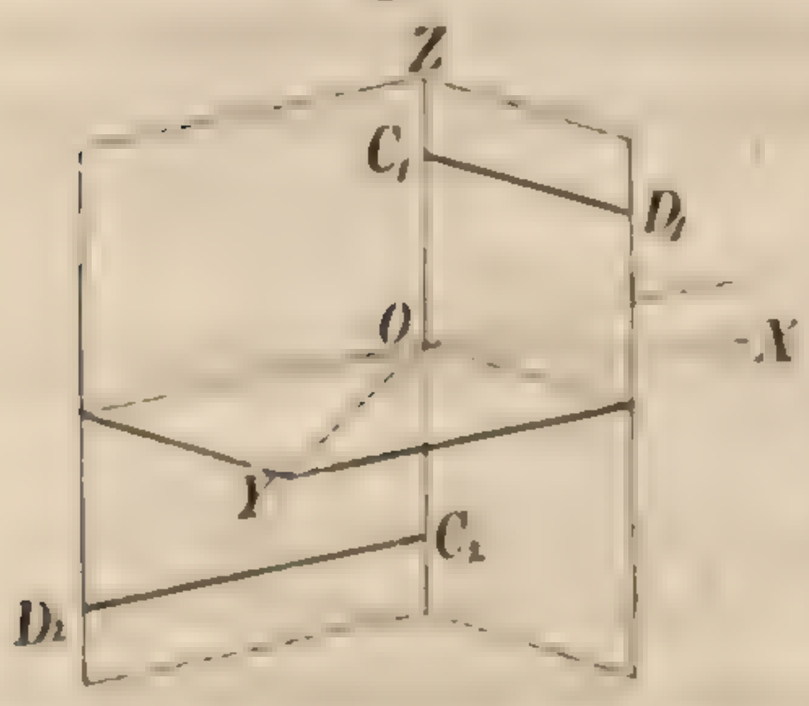
$$7) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{p - b_1}{P - B_1} = -\frac{q - c_1}{Q - C_1}, \\ y_1 = \frac{b_1 P - p B_1}{P - B_1}, \quad z_1 = \frac{c_1 Q - q C_1}{Q - C_1}; \end{cases}$$

$$8)\quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{p - b_2}{P - B_2} = -\dfrac{q - c_2}{Q - C_2}, \\ y_2 = \dfrac{b_2 P - p B_2}{P - B_2}, \quad z_2 = \dfrac{c_2 Q - q C_2}{Q - C_2}; \end{cases}$$

wo die oben gegebenen Werthe von P, p, Q, q zu substituiren sind.

Die gefundenen Ausdrücke vereinfachen sich, wenn man dem Coordinatensystem eine besondere gegen die gegebenen Geraden symmetrische Lage ertheilt; man erhält eine solche auf folgende Weise. Aus den Elementen der Stereometrie ist bekannt, dass immer eine Gerade existirt, die zwei gegebene kreuzende Gerade senkrecht schneidet und die Entfernung beider gegebenen Geraden angiebt (wie man sie analytisch bestimmen kann, wird in §. 13 gezeigt werden); diese Gerade nehmen wir zur z-Achse, sie schneidet die gegebenen Geraden $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$ in zwei Punkten C_1 und C_2, zwischen welchen wir den Coordinatenanfang in die Mitte legen, so dass $O C_1 = c$ und $O C_2 = -c$ ist; ferner ziehen wir durch O Parallelen zu $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$, halbiren die Winkel zwischen diesen Parallelen und nehmen die auf einander senkrechten Halbirungslinien zu den Achsen der x und der y. In Beziehung auf dieses neue rechtwinklige Coordinatensystem sind die Gleichungen der gegebenen Geraden

Fig. 9.



$$y = Bx, \qquad z = c,$$
$$y = -Bx, \qquad z = -c,$$

also durch Vergleich mit dem Früheren

$$B_1 = B, \quad b_1 = 0; \quad C_1 = 0, \quad c_1 = c,$$
$$B_2 = -B, \quad b_2 = 0, \quad C_2 = 0, \quad c_2 = -c;$$

hieraus ergeben sich die Werthe

$$k_1 = B(c - h); \qquad k_2 = B(c + h),$$
$$m_1 = Bf - g; \qquad m_2 = -(Bf + g),$$
$$n_1 = c - h; \qquad n_2 = -(c + h),$$

und als Gleichungen der gesuchten Geraden

$$9)\quad y - g = \frac{B(Bcf - gh)}{cg - Bfh}(x - f), \quad z - h = \frac{B(c^2 - h^2)}{cg - Bfh}(x - f).$$

Liegt der Punkt fgh auf einer der gegebenen Geraden, wie z. B.

wenn $g = Bf$ und $h = c$, so nehmen die Coefficienten von $x - f$ die vieldeutige Form $\frac{0}{0}$ an und geben dadurch zu erkennen, dass die Aufgabe in diesem Falle unbestimmt ist.

§. 10.

Transversale zu zweien und Parallele zur dritten von drei gegebenen Geraden.

Wenn drei gegebene Gerade durch die Gleichungen

$$1) \quad \begin{cases} y = Bx + b, & z = Cx + c, \\ y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2, \end{cases}$$

bestimmt sind, so kann nach einer vierten Geraden gefragt werden, welche der ersten parallel ist und die beiden anderen schneidet. Die Gleichungen der gesuchten Geraden mögen heissen

$$2) \quad y = Px + p, \quad z = Qx + q;$$

vermöge des Parallelismus dieser und der ersten Geraden ist

$$3) \quad P = B, \quad Q = C;$$

weil ferner die verlangte Gerade die beiden übrigen Geraden schneiden soll, müssen noch die Gleichungen

$$4) \quad \frac{p - b_1}{q - c_1} = \frac{P - B_1}{Q - C_1} \text{ und } \frac{p - b_2}{q - c_2} = \frac{P - B_2}{Q - C_2}$$

erfüllt sein. Nach Substitution der Werthe von P und Q werden aus diesen Gleichungen die folgenden

$$(C - C_1)\,p - (B - B_1)\,q = b_1\,(C - C_1) - c_1\,(B - B_1),$$
$$(C - C_2)\,p - (B - B_2)\,q = b_2\,(C - C_2) - c_2\,(B - B_2),$$

aus denen sich p und q bestimmen lassen. Setzt man zur Abkürzung

$$5) \quad \begin{cases} b_1\,(C - C_1) - c_1\,(B - B_1) = d_1, \\ b_2\,(C - C_2) - c_2\,(B - B_2) = d_2, \end{cases}$$

so sind die Werthe von p und q:

$$6) \quad \begin{cases} p = \dfrac{d_2\,(B - B_1) - d_1\,(B - B_2)}{(B - B_1)\,(C - C_2) - (B - B_2)\,(C - C_1)}, \\ q = \dfrac{d_2\,(C - C_1) - d_1\,(C - C_2)}{(B - B_1)\,(C - C_2) - (B - B_2)\,(C - C_1)}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der verlangten Geraden lauten demnach

$$7) \quad y = Bx + p, \quad z = Cx + q,$$

wo p und q die oben angegebenen Werthe besitzen. Die Durchschnitte dieser und der beiden anderen Geraden finden sich durch

Formeln, welche mit den unter Nr. 8) und 9) des vorigen Paragraphen entwickelten übereinstimmen, in denen aber $P = B$, $Q = C$ und für p und q die obigen Ausdrücke zu setzen sind.

Weit einfacher wird die Lösung unserer Aufgabe, wenn wir ein in Beziehung auf die drei gegebenen Geraden symmetrisch liegendes Coordinatensystem wählen. Denken wir uns zunächst durch irgend einen Punkt im Raume Parallelen zu den drei Geraden gelegt und diese als Coordinatenachsen genommen, so erhalten wir als Gleichungen der drei Geraden

$$\begin{aligned} y &= b_1, & z &= c_1, \\ x &= a_2, & z &= c_2, \\ x &= a_3, & y &= b_3; \end{aligned}$$

dieses Coordinatensystem verschieben wir parallel nach einem Punkte, dessen Coordinaten sind

$$\tfrac{1}{2}(a_2 + a_3), \qquad \tfrac{1}{2}(b_1 + b_3), \qquad \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)$$

und haben so, wenn die neuen Coordinaten mit x', y', z' bezeichnet werden

$$\begin{aligned} y' + \tfrac{1}{2}(b_1 + b_3) &= b_1, & z' + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2) &= c_1, \\ x' + \tfrac{1}{2}(a_2 + a_3) &= a_2, & z' + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2) &= c_2, \\ x' + \tfrac{1}{2}(a_2 + a_3) &= a_3, & y' + \tfrac{1}{2}(b_1 + b_3) &= b_3; \end{aligned}$$

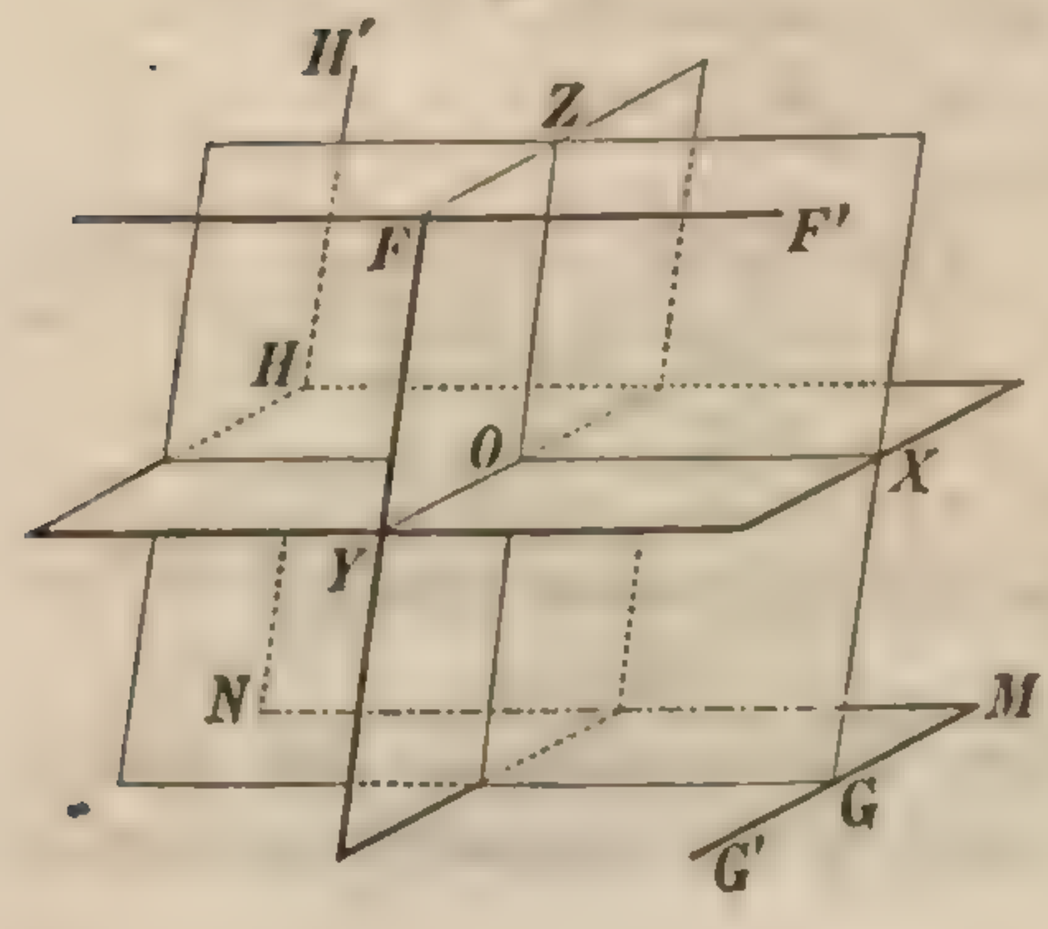
lassen wir endlich die nicht mehr nöthigen Accente weg und setzen zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}(a_2 - a_3) = f, \quad \tfrac{1}{2}(b_1 - b_3) = g, \quad \tfrac{1}{2}(c_1 - c_2) = h,$$

so sind die Gleichungen der drei gegebenen Geraden:

$$8) \quad \begin{cases} y = g, & z = h, \\ x = f, & z = -h, \\ x = -f, & y = -g. \end{cases}$$

Fig. 10.



Zu demselben Coordinatensysteme gelangt man auch dadurch, dass man durch jede der gegebenen Geraden zwei Ebenen parallel zu den anderen Geraden legt, den Mittelpunkt (Diagonalendurchschnitt) des von diesen sechs Ebenen begrenzten Parallelopipedes zum Coordinatenanfang nimmt und durch ihn die Coordinatenachsen pa-

rallel zu den gegebenen Geraden zieht. Soll nun die gesuchte Gerade der ersten Geraden parallel liegen, so sind ihre Gleichungen

$$y = p, \qquad z = q;$$

soll sie ferner die anderen Geraden schneiden, so ergeben sich nach §. 8 Nr. 9) und Nr. 10 (für $B = P = 0$, $C = Q = 0$) die Bedingungen

$$-h = q \text{ und } -g = p;$$

die Gleichungen der verlangten Geraden sind folglich

9) $$y = -g \text{ und } z = -h,$$

wie man geometrisch leicht verificiren kann. In der Figur ist die fragliche Gerade mit MN bezeichnet.

§. 11.

Transversale zu vier gegebenen Geraden.

Dass die Aufgabe ‚eine Gerade zu finden, welche drei gegebene Gerade schneidet' unbestimmt ist, erkennt man leicht aus §. 9, wenn man den dort gegebenen Punkt (fgh) auf einer dritten Geraden fortrücken lässt; bestimmt dagegen ist die Aufgabe ‚eine Gerade zu finden, welche vier gegebene Gerade schneidet', vorausgesetzt, dass kein Paar dieser Geraden in einer Ebene liegt. Sind

1) $$\begin{cases} y = Bx + b, & z = Cx + c, \\ y = B_1x + b_1, & z = C_1x + c_1, \\ y = B_2x + b_2, & z = C_2x + c_2, \\ y = B_3x + b_3, & z = C_3x + c_3, \end{cases}$$

die Gleichungen der gegebenen und

2) $$y = Px + p, \qquad y = Qx + q$$

die der gesuchten Geraden, so müssen die vier Unbekannten P, p, Q, q den folgenden vier Gleichungen genügen:

3) $$\begin{cases} \dfrac{p-b}{q-c} = \dfrac{P-B}{Q-C}, & \dfrac{p-b_1}{q-c_1} = \dfrac{P-B_1}{Q-C_1}, \\ \dfrac{p-b_2}{q-c_2} = \dfrac{P-B_2}{Q-C_2}, & \dfrac{p-b_3}{q-c_3} = \dfrac{P-B_3}{Q-C_3}, \end{cases}$$

welche zur Bestimmung jener Grössen hinreichen. Um aber den Weitläufigkeiten zu entgehen, welche die Auflösung der vorstehenden Gleichungen mit sich bringt, wollen wir die Grössen p und q vermeiden und zunächst den Punkt $x_0y_0z_0$ aufsuchen, in welchem die verlangte Gerade die erste der gegebenen Geraden schneidet. Da der genannte Punkt beiden Geraden zugleich angehört, so gelten für seine Coordinaten die Gleichungen

4) $y_0 = Bx_0 + b, \qquad z_0 = Cx_0 + c,$

5) $y_0 = Px_0 + p, \qquad z_0 = Qx_0 + q,$

woraus man durch Elimination von y_0 und z_0 erhält

6) $p = b + (B - P)x_0, \qquad q = c + (C - Q)x_0.$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die drei letzten Gleichungen von Nr. 3) liefert drei Gleichungen zur Bestimmung von P, Q und x_0; die Substitution in die erste jener Gleichungen ist nicht mehr nöthig, denn dass die gesuchte Gerade die erste Gerade schneidet, ist schon dadurch ausgedrückt, dass beide den Punkt $x_0 y_0 z_0$ gemein haben sollen. Die zweite Gleichung in Nr. 3) wird nach der angedeuteten Operation zur folgenden:

$$[c_1 - c + (C_1 - C)x_0]P - [b_1 - b + (B_1 - B)x_0]Q = B_1(c_1 - c) - C_1(b_1 - b) + (BC_1 - B_1C)x_0,$$

und von ähnlicher Gestalt sind die aus den zwei anderen Gleichungen entstehenden neuen Gleichungen. Zur Abkürzung sei nun

$$B_1(c_1 - c) - C_1(b_1 - b) = l_1, \qquad BC_1 - B_1C = L_1,$$
$$B_2(c_2 - c) - C_2(b_2 - b) = l_2, \qquad BC_2 - B_2C = L_2,$$
$$B_3(c_3 - c) - C_3(b_3 - b) = l_3, \qquad BC_3 - B_3C = L_3;$$
$$b_1 - b = m_1, \quad B_1 - B = M_1, \quad c_1 - c = n_1, \quad C_1 - C = N_1,$$
$$b_2 - b = m_2, \quad B_2 - B = M_2, \quad c_2 - c = n_2, \quad C_2 - C = N_2,$$
$$b_3 - b = m_3, \quad B_3 - B = M_3, \quad c_3 - c = n_3, \quad C_3 - C = N_3;$$

die aufzulösenden drei Gleichungen sind dann folgende:

$$(n_1 + N_1x_0)P - (m_1 + M_1x_0)Q = l_1 + L_1x_0,$$
$$(n_2 + N_2x_0)P - (m_2 + M_2x_0)Q = l_2 + L_2x_0,$$
$$(n_3 + N_3x_0)P - (m_3 + M_3x_0)Q = l_3 + L_3x_0.$$

Aus den beiden ersten ergeben sich für P und Q die Ausdrücke

7) $$P = \frac{(l_1 + L_1x_0)(m_2 + M_2x_0) - (l_2 + L_2x_0)(m_1 + M_1x_0)}{(m_2 + M_2x_0)(n_1 + N_1x_0) - (m_1 + M_1x_0)(n_2 + N_2x_0)},$$

8) $$Q = \frac{(l_1 + L_1x_0)(n_2 + N_2x_0) - (l_2 + L_2x_0)(n_1 + N_1x_0)}{(m_2 + M_2x_0)(n_1 + N_1x_0) - (m_1 + M_1x_0)(n_2 + N_2x_0)},$$

und wenn man diese in die letzte der obigen drei Gleichungen substituirt, so bleibt folgende nur die eine Unbekannte x_0 enthaltende Gleichung übrig:

9) $$\begin{cases} (n_3 + N_3x_0)[(l_1 + L_1x_0)(m_2 + M_2x_0) - (l_2 + L_2x_0)(m_1 + M_1x_0)] \\ -(m_3 + M_3x_0)[(l_1 + L_1x_0)(n_2 + N_2x_0) - (l_2 + L_2x_0)(n_1 + N_1x_0)] \\ = (l_3 + L_3x_0)[(m_2 + M_2x_0)(n_1 + N_1x_0) - (m_1 + M_1x_0)(n_2 + N_2x_0)]. \end{cases}$$

Nach Ausführung der angedeuteten Multiplikationen kann man alle Glieder auf eine Seite bringen, dies giebt eine cubische Gleichung von der Form

10) $$x + \lambda x_0 + \mu x_0^2 + \nu x_0^3 = 0$$

und zwar ist der Coefficient der höchsten Potenz

$$\nu = L_1(M_2 N_3 - M_3 N_2) + L_2(M_3 N_1 - M_1 N_3) + L_3(M_1 N_2 - M_2 N_1).$$

Dieser Ausdruck zieht sich sehr zusammen, wenn man beachtet, dass

$$L_1 = B C_1 - B_1 C = B(C_1 - C) - C(B_1 - B) = B N_1 - C M_1$$

und ebenso

$$L_2 = B N_2 - C M_2, \qquad L_3 = B N_3 - C M_3$$

ist; es findet sich nämlich durch Ausführung der Multiplicationen und Vereinigung der mit B und C behafteten Glieder

$$\nu = B[N_1(M_2 N_3 - M_3 N_2) + N_2(M_3 N_1 - M_1 N_3) + N_3(M_1 N_2 - M_2 N_1)]$$
$$+ C[M_1(M_2 N_3 - M_3 N_2) + M_2(M_3 N_1 - M_1 N_3) + M_3(M_1 N_2 - M_2 N_1)]$$

d. h. $\nu = 0$.

Die Gleichung 10) ist daher nur eine quadratische und liefert im Allgemeinen zwei Werthe von x_0; die Gleichungen 7) und 8) bestimmen nachher die Unbekannten P und Q, die in Nr. 6) verzeichneten Gleichungen endlich liefern p und q. Hierin liegt in der That eine vollständige Lösung der Aufgabe, doch ist nicht zu läugnen, dass die ganze Rechnung etwas unbehilflicher Natur ist und namentlich zu einer Construction der verlangten Geraden gänzlich unbrauchbar sein würde. Wir geben daher eine zweite weit einfachere Behandlung des Problemes.

Die in Nr. 1) erwähnten Geraden mögen kurz s, s_1, s_2, s_3 und die gesuchte Transversale mag t heissen; durch jede der drei Geraden s_1, s_2, s_3 legen wir zwei Ebenen parallel zu den beiden übrigen Geraden, nehmen den Mittelpunkt des von den entstandenen sechs Ebenen begrenzten Parallelopipedes zum Coordinatenanfang und ziehen durch ihn die Coordinatenachsen parallel zu den Geraden s_1, s_2, s_3. Wie im vorigen Paragraphen haben wir dann

11) $$\begin{cases} y = g, & z = h & \text{als Gleichungen von } s_1, \\ x = f, & z = -h & \text{„ „ „ } s_2, \\ x = -f, & z = -g & \text{„ „ „ } s_3; \end{cases}$$

ferner seien wie vorhin

12) $y = Bx + b$, $z = Cx + c$ die Gleichungen von s,

13) $y = Px + p$; $z = Qx + q$ „ „ „ t.

Die Bedingung für den Durchschnitt von t mit s ist

14) $$\frac{p - b}{q - c} = \frac{P - B}{Q - C};$$

die Bedingung für den Durchschnitt von t mit s_1

15) $$\frac{p-g}{q-h}=\frac{P}{Q}.$$

Wenn ferner ein Durchschnitt von t mit s_2 existiren soll, so muss die xz-Projection von t durch die gleichnamige Spur von s_2 gehen; dies giebt

16) $$-h=Qf+q;$$

endlich schneiden sich t und s_3, wenn die xy-Projection von t durch die xy-Spur von s_3 geht, d. h. wenn

17) $$-g=-Pf+p.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgen die Ausdrücke

18) $$P=\frac{p+g}{f}, \qquad Q=-\frac{q+h}{f}$$

und durch Substitution derselben verwandelt sich die Gleichung 15) in die nachstehende

19) $$pq=gh;$$

auf gleiche Weise ergiebt sich aus Nr. 14), wenn man das vorstehende Ergebniss benutzt

20) $$(c-h-Cf)p+(b-g+Bf)q=2gh-b(h+Cf)-c(g-Bf).$$

Die Bestimmung von p und q aus den Gleichungen 19) und 20) unterliegt jetzt keiner Schwierigkeit, die Formeln in 18) geben nachher P und Q, womit die Aufgabe gelöst ist. Besonderes Interesse gewährt es aber, die geometrische Bedeutung der letzten Gleichungen aufzusuchen und daraus eine Construction der Transversale t herzuleiten.

Die Gleichung 19) sagt, dass die yz-Spur der Geraden t, nämlich der Punkt pq, auf einer Hyperbel liegt, deren Asymptoten die Achsen der y und der z sind und deren Potenz dem Produkte gh gleich kommt; die Gleichung 20) giebt zu erkennen, dass der Punkt pq einer Geraden angehört, welche von der y-Achse das Stück

$$m=\frac{2gh-b(h+Cf)-c(g-Bf)}{c-h-Cf}$$

und von der z Achse die Strecke

$$n=\frac{2gh-b(h+Cf)-c(g-Bf)}{b-g+Bf}$$

abschneidet; der Punkt pq ist demnach der Durchschnitt jener Hyperbel mit dieser Geraden. Um nun die Strecken m und n zu construiren, legen wir durch den Punkt $-f$, $-g$, $+h$ eine Parallele zu s und suchen ihre yz-Spur; die Gleichungen der fraglichen Parallelen sind

$$y + g = B(x + f), \qquad z - h = C(x + f)$$

oder

$$y = Bx - g + Bf, \qquad z = Cx + h + Cf$$

mithin die Coordinaten ihrer yz-Spur

$$b_1 = -g + Bf, \qquad c_1 = h + Cf;$$

legen wir zweitens durch den Punkt $+f$, $+g$, $-h$ eine Parallele zu s, so erhalten wir für die Coordinaten ihrer yz-Spur

$$b_2 = g - Bf, \qquad c_2 = -h - Cf,$$

d. i.

$$b_2 = -b_1 \quad \text{und} \quad c_2 = -c_1.$$

Vermöge dieser Werthe können die für m und n angegebenen Ausdrücke auf folgende Form gebracht werden

$$m = \frac{2gh}{c - c_1} + \frac{bc_1 - b_1c}{c_1 - c},$$

$$n = \frac{2gh}{b - b_2} + \frac{bc_2 - b_2c}{b - b_2};$$

nun stellt aber der Ausdruck

$$\frac{bc_1 - b_1c}{c_1 - c}$$

das Stück dar, welches die Verbindungslinie der Punkte bc und b_1c_1 auf der y-Achse abschneidet und welches kurz m_1 heissen möge, ebenso bedeutet der Ausdruck

$$\frac{bc_2 - b_2c}{b - b_2}$$

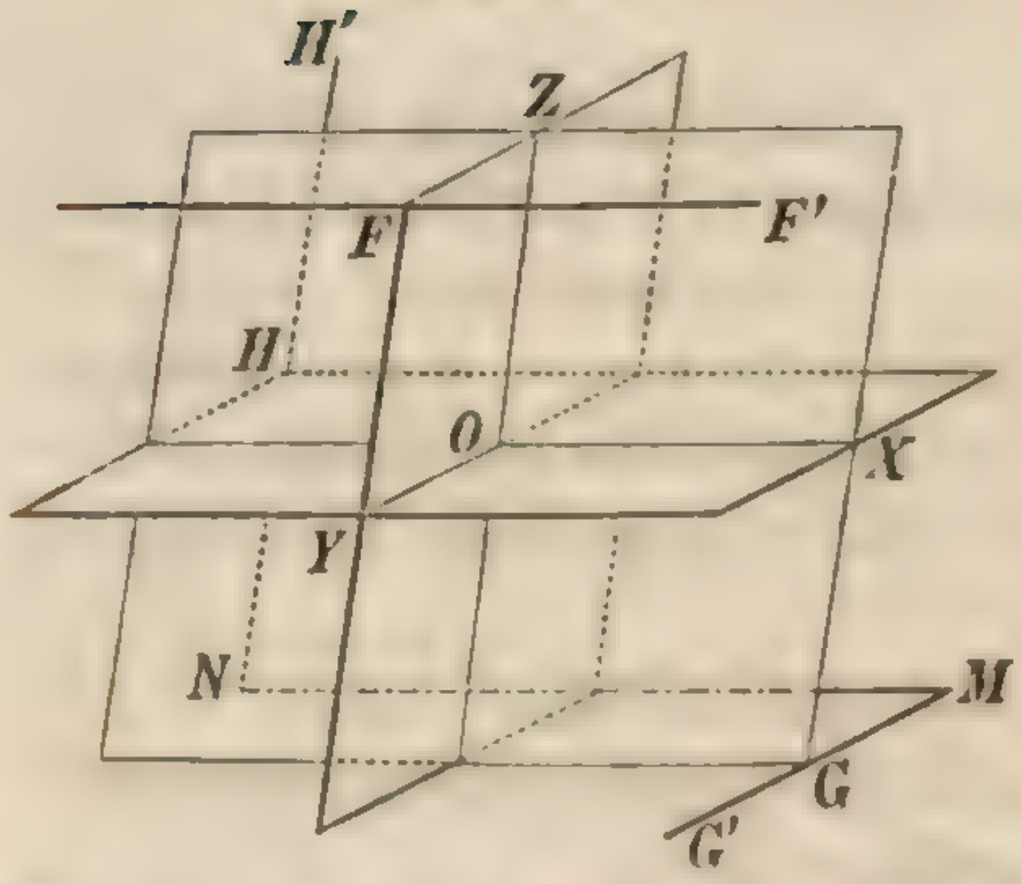
die Strecke, welche die Verbindungslinie der Punkte bc und b_2c_2 von der z-Achse abschneidet und die wir kurz n_2 nennen; es ist daher

$$21) \quad m = \frac{gh}{\frac{1}{2}(c - c_1)} + m_1, \qquad n = \frac{gh}{\frac{1}{2}(b - b_2)} + n_2$$

und diese Ausdrücke sind einfach genug für eine geometrische Construction; letztere besteht nämlich aus folgenden Operationen.

Man construirt zunächst die vorhin erwähnte Hyperbel zwischen den Asymptoten OY und OZ mit der Potenz gh; zu der gegebenen Geraden s, deren yz-Spur die Coordinaten b, c besitzt und A heissen möge, legt man durch den Punkt $-f$, $-g$, $+h$ (in der Figur H') eine Parallele und bestimmt ihre yz-Spur A_1, deren Coordinaten b_1 und c_1 sind; auf gleiche Weise hat man durch den Punkt $+f$, $+g$, $-h$ (in der Figur G') eine Parallele zu s zu legen und ihre yz-Spur A_2 aufzusuchen, deren Coordinaten

Fig. 10.



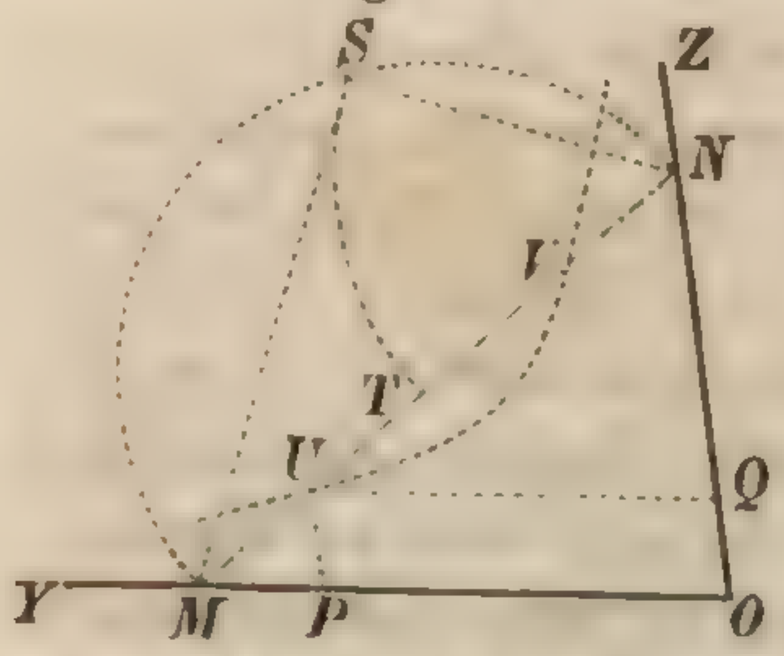
b_2 und c_2 sind. Die Gerade AA_1 schneidet von der y-Achse ein Stück ab, welches mit m_1 einerlei ist, ebenso schneidet AA_2 von der z-Achse eine Strecke $= n_2$ ab; das erste Stück vergrössert man um die zur Ordinate $\frac{1}{2}(c - c_1)$ gehörende Hyperbelabscisse, das zweite Stück um die zur Abscisse $\frac{1}{2}(b - b_2)$ gehörige Hyperbelordinate, und erhält hiermit auf der y-Achse die Strecke $OM = m$, sowie auf der z-Achse die Strecke $ON = n$. Die Gerade MN schneidet die Hyperbel in zwei Punkten U, V, und diese sind die yz-Spuren der beiden Geraden, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen. Will man endlich die verlangten Geraden selber construiren, so braucht man nur durch den einen oder anderen der Punkte U und V eine Gerade zu legen, welche zwei der gegebenen Geraden etwa s und s_1 schneidet.

Wir haben bei der angegebenen Construction eine Hyperbel benutzt, weil sich diese sehr ungezwungen darbot, können aber auch auf folgende Weise statt der Hyperbel einen Kreis verwenden. Nachdem m_1 und n_2 wie vorhin bestimmt worden sind, construiren wir die Ausdrücke

$$\frac{gh}{\frac{1}{2}(c - c_1)} \text{ und } \frac{gh}{\frac{1}{2}(b - b_2)}$$

als vierte Proportionalen und leiten daraus nach Formel 21) m und n ab, wodurch wir wieder zu der Geraden MN gelangen. Es kommt nun blos darauf an, in MN den Punkt U (oder V) zu finden, dessen Coordinaten $OP = p$ und $OQ = q$ der Gleichung $pq = gh$ genügen; setzen wir die bekannte Strecke $MN = l$, die unbekannten Stücke $MU = u$ und $NU = v$, so ist in den ähnlichen Drei-

Fig. 10*.



ecken OMN, PMU und QNU

$$l : m = v : p \text{ mithin } p = \frac{m v}{l},$$

$$l : n = u : q \quad „ \quad q = \frac{n u}{l},$$

an die Stelle der Gleichung $pq = gh$ tritt daher die folgende

$$uv = \frac{g h l^2}{m n} \text{ oder } uv = k^2,$$

worin k zur Abkürzung dienen möge und mittelst der Proportion

22) $$\sqrt{mn} : \sqrt{gh} = l : k$$

leicht construirt werden kann. Ausserdem haben wir $u + v = l$ und durch Verbindung beider Gleichungen

$$u = \tfrac{1}{2}\left[l - \sqrt{l^2 - (2k)^2}\right],$$
$$v = \tfrac{1}{2}\left[l + \sqrt{l^2 - (2k)^2}\right].$$

Dies giebt folgende Construction. Nachdem k mittelst der Proportion 22) bestimmt ist, beschreibt man über MN als Durchmesser einen Halbkreis, trägt in diesen von M aus die Linie $MS = 2k$ ein, nimmt $NT = NS$ und halbirt die Strecke MT in U; der zweite Punkt V liegt von N aus in der Entfernung $NV = MU$.

§. 12.

Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade.

Die Coordinaten eines gegebenen Punktes mögen f, g, h heissen und

1) $$y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden. Soll nun durch den Punkt fgh eine Gerade gezogen werden, welche die erste Gerade senkrecht schneidet, so sind die in den Gleichungen des gesuchten Perpendikels etwa

2) $$y = Mx + m, \qquad z = Nx + n$$

vorkommenden vier Unbekannten (M, N, m, n) mittelst folgender Bedingungen zu bestimmen. Weil erstens die verlangte Gerade durch den Punkt fgh gehen soll, ist

3) $$g = Mf + m, \qquad h = Nf + n;$$

weil ferner das Perpendikel die gegebene Gerade schneiden soll, muss die Bedingungsgleichung

4) $$(m - b)(N - C) = (n - c)(M - B)$$

statt finden; endlich gehört zur senkrechten Lage beider Geraden gegen einander die Gleichung (§. 8 Nr. 15)

$$\left.\begin{array}{l} 1 + BM + CN \\ +(B+M)\cos(xy) + (C+N)\cos(xz) + (BN+CM)\cos(yz) \end{array}\right\} = 0,$$

in welcher wir zur Abkürzung die Cosinus der Coordinatenwinkel (yz), (xz), (xy) mit α, β, γ bezeichnen und die gleichartigen Grössen vereinigen, so dass die Gleichung lautet

5) $(B+\gamma+C\alpha)M + (C+\beta+B\alpha)N = -(1+B\gamma+C\beta).$

Aus den Gleichungen 3) erhalten wir

6) $m = g - Mf, \quad n = h - Nf,$

durch deren Substitution die Gleichung 4) in die folgende übergeht:

7) $(Cf+c-h)M - (Bf+b-g)N = B(c-h) - C(b-g).$

Die Gleichungen 5) und 7) bestimmen M und N, wobei zur Abkürzung gesetzt werden möge:

8) $\begin{cases} F = (Bf+b-g)(B+C\alpha+\gamma) + (Cf+c-h)(C+B\alpha+\beta), \\ G = [B(c-h)-C(b-g)](C+B\alpha+\beta) - (Bf+b-g)(1+B\gamma+C\beta), \\ H = [C(b-g)-B(c-h)](B+C\alpha+\gamma) - (Cf+c-h)(1+B\gamma+C\beta); \end{cases}$

die Werthe der vier Unbekannten sind dann

$$M = \frac{G}{F}, \qquad N = \frac{H}{F},$$

$$m = g - \frac{G}{F}f, \qquad n = h - \frac{H}{F}f,$$

mithin die Gleichungen der gesuchten Senkrechten:

9) $y - g = \frac{G}{F}(x-f), \qquad z - h = \frac{H}{F}(x-f).$

Wir suchen zweitens die Coordinaten x_0, y_0, z_0 desjenigen Punktes zu bestimmen, in welchem die von fgh ausgehende Senkrechte die gegebene Gerade schneidet. Da der fragliche Durchschnitt beiden Geraden gleichzeitig angehört, so gelten für seine Coordinaten die Beziehungen

10) $y_0 = Bx_0 + b, \quad y_0 - g = \frac{G}{F}(x_0-f), \quad z_0 - h = \frac{H}{F}(x_0-f);$

aus den beiden ersten Gleichungen erhalten wir

$$x_0 = -\frac{F(b-g)+Gf}{BF-G}$$

oder auch

11) $$x_0 = f - \frac{Bf+b-g}{BF-G}F.$$

Vermöge der oben angegebenen Werthe von F und G ist aber

$$\begin{aligned} BF-G = {} & (Bf+b-g)\{B(B+C\alpha+\gamma)+1+B\gamma+C\beta\} \\ & +(C+B\alpha+\beta)\{B(Cf+c-h)-B(c-h)+C(b-g)\} \end{aligned}$$

und unter der Bemerkung, dass der Inhalt der letzten Parenthese $= C(Bf + b - g)$ ist,

$$= \frac{BF - G}{(Bf + b - g)(1 + B^2 + C^2 + 2B\gamma + 2C\beta + 2BC\alpha)}.$$

Benutzen wir die schon in §. 6 gebrauchte Abkürzung

$$12) \qquad D^2 = 1 + B^2 + C^2 + 2B\gamma + 2C\gamma + 2BC\alpha,$$

so vereinfacht sich der Werth von x_0 wesentlich; aus den Gleichungen 9) ergeben sich nachher y_0 und z_0, überhaupt sind

$$13) \qquad x_0 = f - \frac{F}{D^2}, \quad y_0 = g - \frac{G}{D^2}, \quad z_0 = h - \frac{H}{D^2},$$

die Coordinaten des Fusspunktes der vom Punkte fgh auf die gegebene Gerade herabgelassenen Senkrechten.

Endlich möge noch die Entfernung p der Punkte fgh und $x_0 y_0 z_0$ aufgesucht werden; hierzu dient die Formel

$$p^2 = (x_0 - f)^2 + (y_0 - g)^2 + (z_0 - h)^2$$
$$+ 2(x_0 - f)(y_0 - g)\gamma + 2(x_0 - f)(z_0 - h)\beta + 2(y_0 - g)(z_0 - h)\alpha,$$

in welche nur die obigen Werthe von x_0, y_0, z_0 einzuführen sind. Man findet auf diese Weise

$$14) \qquad p = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2 + 2FG\gamma + 2FH\beta + 2GH\alpha}}{D^2}$$

für die Entfernung des Punktes von der Geraden.

Bei rechtwinkligen Coordinaten hat man einfacher

$$15) \quad \begin{cases} F = B(Bf + b - g) + C(Cf + c - h), \\ G = C[B(c - h) - C(b - g)] - (Bf + b - g), \\ H = B[C(b - g) - B(c - g)] - (Cf + c - h), \end{cases}$$

die Gleichungen der Senkrechten lauten wiederum:

$$16) \quad y - g = \frac{G}{F}(x - f), \qquad z - h = \frac{H}{F}(x - f),$$

die Coordinaten ihres Fusspunktes sind:

$$17) \quad \begin{cases} x_0 = f - \dfrac{F}{1 + B^2 + C^2}, \quad y_0 = g - \dfrac{G}{1 + B^2 + C^2}, \\ z_0 = h - \dfrac{H}{1 + B^2 + C^2}, \end{cases}$$

und der Abstand des Punktes fgh von der gegebenen Geraden ist

$$18) \qquad p = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2}}{1 + B^2 + C^2}.$$

Dieser Ausdruck gestattet noch eine Zusammenziehung; bezeichnen wir nämlich zur Abkürzung die Ausdrücke

$$B(c-h)-C(b-g),\quad Bf+b-g,\quad Cf+c-h$$

der Reihe nach mit a', b', c', so dass also die Gleichungen

$$F=Bb'+Cc',\qquad G=Ca'-b',\qquad H=-Ba'-c'$$

statt finden, so erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}F^2+G^2+H^2&=b'^2+c'^2+B^2a'^2+B^2b'^2+C^2a'^2+C^2c'^2\\&\quad+2(BCb'c'-Ca'b'+Ba'c');\end{aligned}$$

der Parentheseninhalt ist, wie man leicht findet, einerlei mit

$$a'^2+B^2c'^2+C^2b'^2,$$

wodurch wir zur Gleichung

$$F^2+G^2+H^2=(1+B^2+C^2)(a'^2+b'^2+c'^2)$$

gelangen. Hiernach nimmt die Formel 18) die folgende Gestalt an

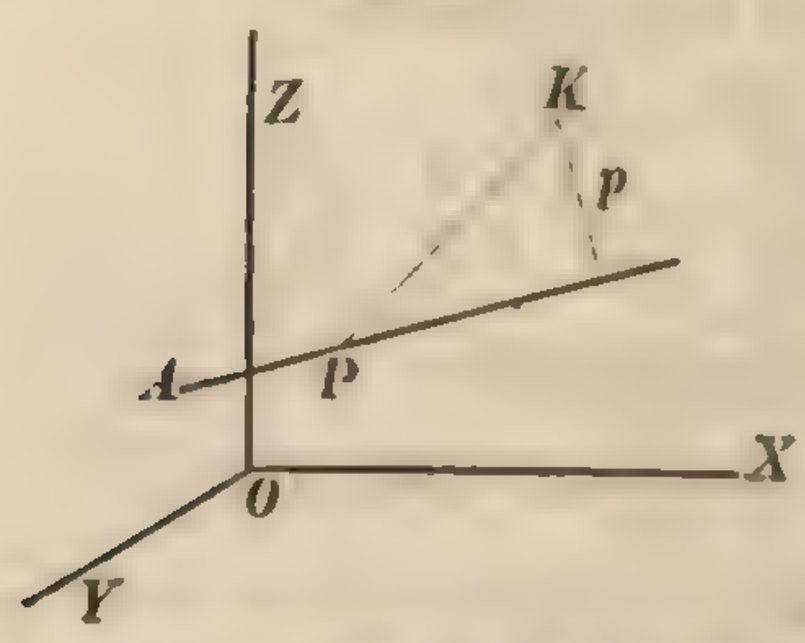
$$p=\sqrt{\frac{a'^2+b'^2+c'^2}{1+B^2+C^2}}$$

d. i. nach Wiedereinsetzung der Werthe von a', b' und c'

$$19)\quad p=\sqrt{\frac{(Bf+b-g)^2+(Cf+c-h)^2+[B(c-h)-C(b-g)]^2}{1+B^2+C^2}}.$$

Zu derselben Formel führt noch ein anderer Weg, der von dem Früheren unabhängig und dem Verfahren der descriptiven Geometrie nachgebildet ist; letztere würde nämlich den gegebenen Punkt fgh mit irgend einem Punkte P der gegebenen Geraden verbinden, die durch beide Gerade bestimmte Ebene in die Bildebene umlegen und nachher die gesuchte Senkrechte planimetrisch construiren. Dem entspricht folgende Rechnung. Die rechtwinkligen Coordinaten des auf der gegebenen Geraden willkürlich

Fig. 11.



gewählten Punktes mögen x, y, z sein, wobei die Gleichungen

$$y=Bx+b,\qquad z=Cx+c$$

statt finden, die Entfernung der Punkte fgh und xyz heisse u, so bestimmen sich zunächst die Winkel, welche u mit den Achsen bildet, durch die Formeln

$$\cos(ux)=\frac{f-x}{u},\quad \cos(uy)=\frac{g-y}{u},\quad \cos(uz)=\frac{h-z}{u};$$

nennt man ferner die gegebene Gerade kurz s und (sx), (sy), (sz) ihre Winkel mit den Achsen, so ist

$$\cos(us) = \cos(ux)\cos(sx) + \cos(uy)\cos(sy) + \cos(uz)\cos(sz)$$

und durch Substitution der vorigen Werthe, sowie der Ausdrücke für $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ aus §. 6 Nr. 9:

$$\cos(us) = \frac{f - x + (g - y)B + (h - z)C}{u\sqrt{1 + B^2 + C^2}}.$$

Weiter hat man

$$p^2 = u^2 \sin^2(us) = u^2 - [u\cos(us)]^2,$$

vermöge des obigen Werthes von $\cos(us)$ und unter Rücksicht auf die Gleichung

$$u^2 = (f - x)^2 + (g - y)^2 + (h - z)^2$$

gestaltet sich die Formel für p^2 zur folgenden

$$p^2 = (f - x)^2 + (g - y)^2 + (h - z)^2 - \frac{[f - x + B(g - y) + C(h - z)]^2}{1 + B^2 + C^2};$$

daraus wird, indem man Alles auf gleichen Nenner bringt:

$$p^2 = \frac{[B(f - x) - (g - y)]^2 + [C(f - x) - (h - z)]^2 + [B(h - z) - C(g - y)]^2}{1 + B^2 + C^2}.$$

Durch Substitution der für y und z angegebenen Werthe und nachherige Wurzelextraction geht diese Formel in die frühere (Nr. 19) über.

Die für p entwickelten Formeln dienen auch zur Bestimmung des Abstandes zweier parallelen Geraden, deren Gleichungen

$$20)\quad \begin{cases} y = Bx + b, & z = Cx + c, \\ y = Bx + b_1, & z = Cx + c_1, \end{cases}$$

sein mögen; setzt man nämlich fest, dass der Punkt fgh auf der zweiten Geraden liegt, dass also die Gleichungen

$$g = Bf + b_1, \qquad h = Cf + c_1$$

statt finden, so ist seine Entfernung von der ersten Geraden einerlei mit dem Abstande der Parallelen von einander. Vermöge der angegebenen Werthe von g und h wird zunächst

$$21)\quad \begin{cases} F = (b - b_1)(B + C\alpha + \gamma) + (c - c_1)(C + B\alpha + \beta), \\ G = [(c - c_1)B - (b - b_1)C](C + B\alpha + \beta) - (b - b_1)(1 + B\gamma + C\beta), \\ H = [(b - b_1)C - (c - c_1)B](B + C\alpha + \gamma) - (c - c_1)(1 + B\gamma + C\beta), \end{cases}$$

und dann wie früher

$$22)\quad p = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2 + 2FG\gamma + 2FH\beta + 2GH\alpha}}{D^2}.$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist

$$23)\quad \begin{cases} F = (b-b_1)B + (c-c_1)C, \\ G = (c-c_1)BC - (b-b_1)(1+C^2), \\ H = (b-b_1)BC - (c-c_1)(1+B^2), \end{cases}$$

und

$$24)\quad p = \frac{\sqrt{F^2+G^2+H^2}}{1+B^2+C^2}.$$

§. 13.

Senkrechte zu zwei gegebenen Geraden.

Die Gleichungen zweier gegebenen Geraden mögen sein

$$1)\quad y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1,$$
$$2)\quad y = B_2 x + b_2, \qquad z = C_2 x + c_2,$$

und die Gleichungen einer dritten Geraden, welche die beiden vorigen senkrecht schneidet,

$$3)\quad y = Mx + m, \qquad z = Nx + n;$$

zur Bestimmung der vier Unbekannten M, m, N, n haben wir dann folgende Bedingungen. Da die gesuchte Gerade mit jeder der gegebenen Geraden einen rechten Winkel bilden soll, so gelten die Gleichungen

$$4)\quad \begin{cases} (B_1+C_1\alpha+\gamma)M + (C_1+B_1\alpha+\beta)N = -(1+B_1\gamma+C_1\beta) \\ (B_2+C_2\alpha+\gamma)M + (C_2+B_2\alpha+\beta)N = -(1+B_2\gamma+C_2\beta), \end{cases}$$

worin α, β, γ wir früher die Cosinus der Coordinatenwinkel (yz), (xz), (xy) bezeichnen. Damit ferner die verlangte Gerade jede der gegebenen Gerade schneide, sind noch die zwei Bedingungen

$$5)\quad \begin{cases} (m-b_1)(N-C_1) = (n-c_1)(M-B_1) \\ (m-b_2)(N-C_2) = (n-c_2)(M-B_2) \end{cases}$$

erforderlich. Von den vier aufgestellten Gleichungen bestimmen die beiden ersten die Unbekannten M und N; setzen wir nämlich zur Abkürzung

$$\mathfrak{A} = (B_1C_2 - B_2C_1)(1-\alpha^2) + (B_1-B_2)(\beta-\alpha\gamma) - (C_1-C_2)(\gamma-\alpha\beta),$$

$$\mathfrak{B} = (B_1-B_2)(1-\gamma^2) + (C_1-C_2)(\alpha-\beta\gamma) + (B_1C_2-B_2C_1)(\beta-\alpha\gamma),$$

$$\mathfrak{C} = (C_1-C_2)(1-\beta^2) + (B_1-B_2)(\alpha-\beta\gamma) - (B_1C_2-B_2C_1)(\gamma-\alpha\beta),$$

so erhalten wir aus den Gleichungen 4) die Werthe

$$6)\quad M = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}, \qquad N = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}.$$

Um zweitens m und n zu finden, substituiren wir die für M und N angegebenen Werthe in die Gleichungen 5); letztere nehmen dadurch die folgende Form an:

$$7)\quad \begin{cases} (\mathfrak{A}C_1+\mathfrak{B})\,m-(\mathfrak{A}B_1-\mathfrak{C})\,n = b_1(\mathfrak{A}C_1+\mathfrak{B})-c_1(\mathfrak{A}B_1-\mathfrak{C}), \\ (\mathfrak{A}C_2+\mathfrak{B})\,m-(\mathfrak{A}B_2-\mathfrak{C})\,n = b_2(\mathfrak{A}C_2+\mathfrak{B})-c_2(\mathfrak{A}B_2-\mathfrak{C}); \end{cases}$$

die Auflösung dieser beiden Gleichungen ersten Grades hat nicht die mindeste Schwierigkeit und mag unterbleiben, weil sich die ganze Aufgabe noch auf andere Weise behandeln lässt.

Die gemeinschaftliche Normale der beiden gegebenen Geraden ist bestimmt, sobald man die Coordinaten der beiden Punkte $x_1\,y_1\,z_1$ und $x_2\,y_2\,z_2$ kennt, in denen sie die gegebenen Geraden schneidet; durch Verbindung der Gleichung 3) mit den Gleichungen 1) und 2) ergeben sich für jene sechs Coordinaten die Werthe:

$$8)\quad x_1 = -\frac{m-b_1}{M-B_1} \text{ und zugleich } x_1 = -\frac{n-c_1}{N-C_1},$$

$$9)\quad y_1 = B_1x_1+b_1, \qquad z_1 = C_1x_1+c_1;$$

$$10)\quad x_2 = -\frac{m-b_2}{M-B_2} \text{ und zugleich } x_2 = -\frac{n-c_2}{N-C_2},$$

$$11)\quad y_2 = B_2x_2+b_2, \qquad z_2 = C_2x_2+c_2;$$

obschon M, N, m, n, dem Vorigen zufolge, als bekannt gelten können, so würde doch die Substitution ihrer Werthe aus dem Grunde nicht unmittelbar räthlich sein, weil namentlich m und n, durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ausgedrückt, etwas complicirter Form sind; diese Weitläufigkeiten umgehen wir durch vorherige Wegschaffung von m und n. Aus der ersten Formel in Nr. 8) und der ersten Formel in Nr. 10) erhalten wir nämlich durch Elimination von m

$$(M-B_1)\,x_1-(M-B_2)\,x_2 = b_1-b_2,$$

und ebenso aus den zweiten Formeln in 8) und 10) durch Elimination von n

$$(N-C_1)\,x_1-(N-C_2)\,x_2 = c_1-c_2;$$

da M und N bekannt sind, so kommen in diesen Gleichungen nur die Unbekannten x_1 und x_2 vor, wir finden als deren Werthe

$$x_1 = \frac{(b_1-b_2)\,(N-C_2)-(c_1-c_2)\,(M-B_2)}{(M-B_1)\,(N-C_2)-(M-B_2)\,(N-C_1)},$$

$$x_2 = \frac{(b_1-b_2)\,(N-C_1)-(c_1-c_2)\,(M-B_1)}{(M-B_1)\,(N-C_2)-(M-B_2)\,(N-C_1)}.$$

Nach Entwickelung des gemeinschaftlichen Nenners und Substitution der Werthe von M und N (Nr. 6) ergeben sich für x_1 und x_2, sowie für die übrigen Coordinaten folgende Ausdrücke

$$12)\quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{(b_1-b_2)(\mathfrak{A}C_2+\mathfrak{B})-(c_1-c_2)(\mathfrak{A}B_2-\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}(B_1C_2-B_2C_1)+\mathfrak{B}(B_1-B_2)+\mathfrak{C}(C_1-C_2)}, \\ y_1 = B_1x_1+b_1, \qquad z_1 = C_1x_1+c_1; \end{cases}$$

$$13)\quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{(b_1-b_2)(\mathfrak{A}C_1+\mathfrak{B})-(c_1-c_2)(\mathfrak{A}B_1-\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}(B_1C_2-B_2C_1)+\mathfrak{B}(B_1-B_2)+\mathfrak{C}(C_1-C_2)}, \\ y_2 = B_2x_2+b_2, \qquad z_2 = C_2x_2+c_2. \end{cases}$$

Es hat nun auch keine Schwierigkeit, den Abstand der Punkte $x_1\,y_1\,z_1$ und $x_2\,y_2\,z_2$, d. h. die Entfernung der beiden gegebenen Geraden, der Grösse und Lage nach zu bestimmen; es ist nämlich

$$e^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$
$$+2\alpha(y_1-y_2)(z_1-z_2)+2\beta(x_1-x_2)(z_1-z_2)+2\gamma(x_1-x_2)(y_1-y_2).$$

Da die Punkte $x_1\,y_1\,z_1$ und $x_2\,y_2\,z_2$ auf der gemeinschaftlichen Normalen beider Geraden liegen, so gelten die Gleichungen

$$y_1 = Mx_1+m, \qquad z_1 = Nx_1+n,$$
$$y_2 = Mx_2+m, \qquad z_2 = Nx_2+n,$$

woraus folgt

$$14)\quad y_1-y_2 = M(x_1-x_2), \qquad z_1-z_2 = N(x_1-x_2).$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke wird

$$e^2 = (x_1-x_2)^2\left\{1+M^2+N^2+2\alpha MN+2\beta N+2\gamma M\right\};$$

hier haben wir zunächst die Werthe von M und N einzusetzen und nachher die Wurzel zu ziehen; zur Abkürzung sei

$$R^2 = \mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2-2\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{C}-2\beta\mathfrak{A}\mathfrak{B}+2\gamma\mathfrak{A}\mathfrak{C},$$

wir erhalten dann

$$15)\quad e = \frac{x_1-x_2}{\mathfrak{A}}R.$$

Vermöge der eben angegebenen Werthe von x_1 und x_2 ist

$$x_1-x_2 = \frac{(b_1-b_2)(C_1-C_2)-(c_1-c_2)(B_1-B_2)}{\mathfrak{A}(B_1C_2-B_2C_1)+\mathfrak{B}(B_1-B_2)+\mathfrak{C}(C_1-C_2)}\mathfrak{A},$$

mithin lautet die Formel für die Entfernung der beiden Geraden

$$16)\quad e = -\frac{(b_1-b_2)(C_1-C_2)-(c_1-c_2)(B_1-B_2)}{\mathfrak{A}(B_1C_2-B_2C_1)+\mathfrak{B}(B_1-B_2)+\mathfrak{C}(C_1-C_2)}R.$$

Die Richtung von e bestimmt sich, gemäss §. 5, durch die Gleichungen

$$\cos(ex) = \frac{x_1-x_2+(y_1-y_2)\gamma+(z_1-z_2)\beta}{e},$$

$$\cos(ey) = \frac{y_1-y_2+(z_1-z_2)\alpha+(x_1-x_2)\gamma}{e},$$

$$\cos(ez) = \frac{z_1-z_2+(x_1-x_2)\beta+(y_1-y_2)\alpha}{e};$$

in diesen haben wir zunächst $y_1 - y_2$ und $z_1 - z_2$ durch M, N, $x_1 - x_2$ auszudrücken (Nr. 14) und gleichzeitig für M und N ihre Werthe zu setzen; dies giebt

$$\cos(ex) = \frac{x_1 - x_2}{\mathfrak{A}e}(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\gamma - \mathfrak{B}\beta),$$

$$\cos(ey) = \frac{x_1 - x_2}{\mathfrak{A}e}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B}\alpha + \mathfrak{A}\gamma),$$

$$\cos(ez) = \frac{x_1 - x_2}{\mathfrak{A}e}(-\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\beta + \mathfrak{C}\alpha),$$

oder endlich vermöge des aus Nr. 15) genommenen Werthes von e

17)
$$\begin{cases} \cos(ex) = \dfrac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma}{R}, \\ \cos(ey) = \dfrac{\mathfrak{A}\gamma - \mathfrak{B}\alpha + \mathfrak{C}}{R}, \\ \cos(ez) = \dfrac{\mathfrak{A}\beta - \mathfrak{B} + \mathfrak{C}\alpha}{R}. \end{cases}$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem erhalten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die einfachen Werthe

$$\mathfrak{A} = B_1C_2 - B_2C_1, \quad \mathfrak{B} = B_1 - B_2, \quad \mathfrak{C} = C_1 - C_2;$$

ferner ist

$$R^2 = (B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2$$
$$= \mathfrak{A}(B_1C_2 - B_2C_1) + \mathfrak{B}(B_1 - B_2) + \mathfrak{C}(C_1 - C_2),$$

aus den Formeln 16) und 17) werden dann die folgenden:

18)
$$e = \frac{(b_1 - b_2)(C_1 - C_2) - (c_1 - c_2)(B_1 - B_2)}{\sqrt{(B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2}},$$

19)
$$\begin{cases} \cos(ex) = \dfrac{B_1C_2 - B_2C_1}{\sqrt{(B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2}}, \\ \cos(ey) = \dfrac{C_1 - C_2}{\sqrt{(B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2}}, \\ \cos(ez) = \dfrac{-(B_1 - B_2)}{\sqrt{(B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2}}. \end{cases}$$

Im Fall sich beide Geraden schneiden, ist

$$(b_1 - b_2)(C_1 - C_2) = (c_1 - c_2)(B_1 - B_2)$$

und mithin $e = 0$, wie es sein muss; die Formeln 17) oder 19) bestimmen dann die Richtung derjenigen Geraden, welche auf der Ebene der beiden sich schneidenden Geraden senkrecht steht.

Drittes Capitel.

Die ebene Fläche.

---

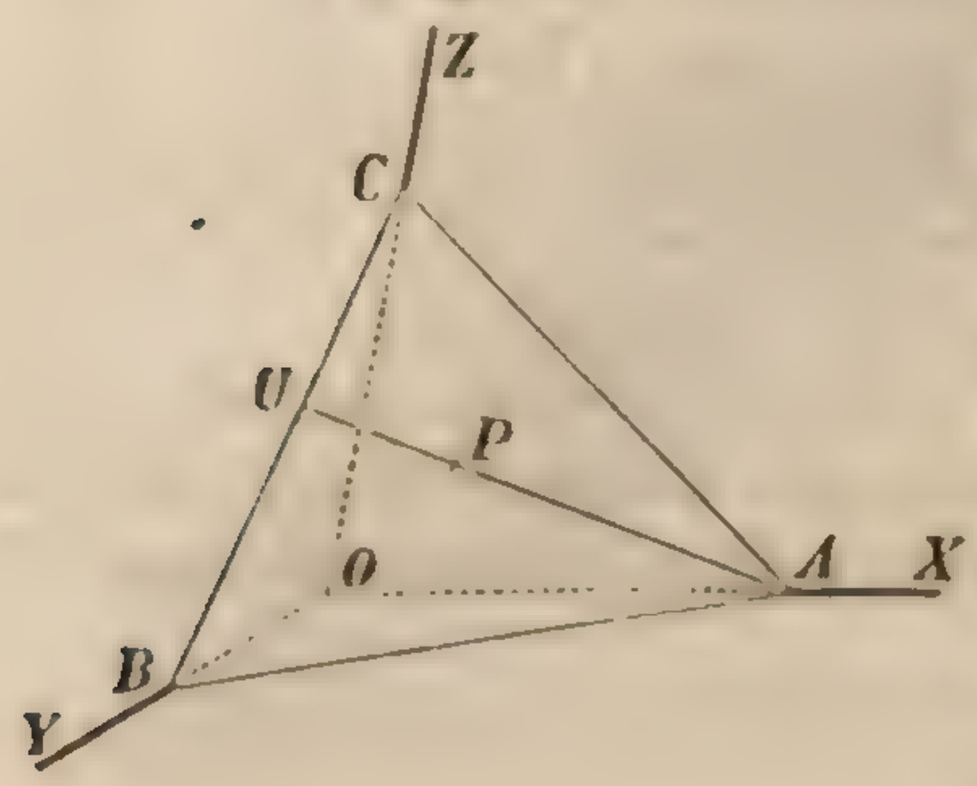
§. 14.

Die Gleichung der Ebene.

Wenn zwischen den drei Coordinaten eines Punktes nur eine Gleichung besteht, so darf man zwei der Grössen x, y, z willkürlich wählen, und die vorhandene Gleichung liefert dann von selbst die dritte, d. h. geometrisch, der Punkt P im Raume ist bestimmt, so bald eine seiner Projectionen willkürlich angenommen wird. Ertheilen wir nun z. B. den Coordinaten x und y alle möglichen Werthe, so betritt die xy-Projection P' alle möglichen Stellen der xy-Ebene, diesen entsprechen successive Lagen des Punktes P, die in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine gewisse Fläche bilden. Demnach wird eine Fläche im Allgemeinen durch eine Gleichung charakterisirt, welche zwischen den drei Coordinaten jedes ihrer Punkte besteht und eben deshalb die Gleichung der Fläche heisst. Die einfachste Fläche ist die Ebene, zu ihrer Gleichung gelangt man auf folgendem Wege.

Eine beliebige Ebene schneidet im Allgemeinen jede der drei Coordinatenachsen und ist ihrer Lage nach durch die Strecken OA, OB, OC bestimmt, welche sie auf den Achsen abgrenzt; man kann sich nämlich, wenn die Punkte A, B, C gegeben sind, die Ebene dadurch entstanden denken, dass eine veränderliche Gerade AU sich um den Punkt A dreht und zugleich an der Geraden BC hingleitet.

Fig. 12.



Sind nun x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der beweglichen Geraden, also auch der Ebene ABC, und setzen wir ferner $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, so sind

$$y = M(x - a) \quad \text{und} \quad z = N(x - a)$$

die Gleichungen der Geraden AU. Für die Coordinaten v und w ihrer yz-Spur, d. h. des Punktes U, erhalten wir daraus

$$v = -Ma = \frac{y}{a - x}a, \qquad w = -Na = \frac{z}{a - x}a;$$

da U auf der Geraden BC liegen muss, so ist bekanntlich

$$\frac{v}{b} + \frac{w}{c} = 1$$

mithin durch Substitution der Werthe von v und w

$$1) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche von den Coordinatenachsen die Strecken a, b, c abschneidet, wobei stillschweigend vorausgesetzt wird, dass keiner dieser Abschnitte der Null gleich ist, dass also die Ebene nicht durch den Coordinatenanfang geht.

Schafft man aus der obigen Gleichung die Brüche weg, so erhält man eine neue Gleichung von der Form

$$2) \qquad Ax + By + Cz = D,$$

von welcher auch direct gezeigt werden kann, dass sie eine Ebene charakterisirt. Es bedarf hierzu nur des Nachweises, dass eine Gerade, welche zwei Punkte mit der durch vorstehende Gleichung bestimmten Fläche gemein hat, ganz in sie hinein fällt. Für zwei auf der Fläche liegende Punkte $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ hat man zunächst

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = D,$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 = D,$$

aus welchen Gleichungen die nachstehenden folgen:

$$3) \quad \begin{cases} A + B\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + C\dfrac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} = 0, \\ \dfrac{B(x_2 y_1 - x_1 y_2) + C(x_2 z_1 - x_1 z_2)}{x_2 - x_1} = D; \end{cases}$$

verbindet man ferner die Punkte $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ durch eine Gerade, so gelten für irgend einen dritten Punkt $x_3 y_3 z_3$ derselben die Gleichungen (§. 7, Nr. 5)

$$y_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_3 + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

$$z_3 = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} x_3 + \frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_2 - x_1}$$

und man zieht daraus die Relation

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 = \left(A + B\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + C\frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} \right) x_3 + \frac{B(x_2 y_1 - x_1 y_2) + C(x_2 z_1 - x_1 z_2)}{x_2 - x_1}$$

d. i. unter Rücksicht auf die Gleichungen 3)

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 = D.$$

Jeder beliebige Punkt $x_3 y_3 z_3$ der von $x_1 y_1 z_1$ nach $x_2 y_2 z_2$ gehenden Geraden liegt demnach auf derselben Fläche, wie jene zwei Punkte, d. h. die Verbindungsgerade irgend zweier Punkte der Fläche fällt ganz in die letztere, was bei der Ebene und nur bei dieser statt findet.

Setzt man in Nr. 2) eine der Coordinaten x, y, z gleich Null, so wird daraus eine Gleichung zwischen den Coordinaten solcher Punkte, die gleichzeitig der Ebene und einer der Coordinatenebenen angehören; man erhält so die Gleichungen derjenigen Geraden, in welchen die Ebene die Coordinatenebenen schneidet, d. i. die Gleichungen der sogenannten Spuren der Ebene. Sie lauten der Reihe nach für die xy, xz und yz-Spur:

4) $Ax + By = D$, $Ax + Cz = D$, $By + Cz = D$,

zwei von diesen drei Spuren bestimmen die Ebene gleichfalls, weil hierdurch die vier Grössen A, B, C, D bekannt werden*).

Lässt man in der Gleichung der Ebene zwei Coordinaten zu Null werden, so erhält man ihren Durchschnitt mit einer der Coordinatenachsen; für $y = 0$ und $z = 0$ ergiebt sich z. B.

---

*) Die descriptive Geometrie, welche ihrer Natur nach Punkte im Raume nicht unmittelbar auffassen kann, benutzt die Spuren der Ebene zur graphischen Darstellung der letzteren; will man daher eine Construction der descriptiven Geometrie mittelst der Rechnung verfolgen (z. B. um die Uebereinstimmung zwischen der descriptiven und analytischen Behandlung einer Aufgabe nachzuweisen), so hat man jede vorkommende Ebene nicht durch eine Gleichung von der Form

$$Ax + By + Cz = D,$$

sondern durch zwei Spurengleichungen, etwa

$$Ax + By = D \text{ und } Ax + Cz = D$$

auszudrücken. Diese Modification des Calcüls ist übrigens so leicht, dass es dazu keiner Beispiele bedürfen wird.

$$Ax = D \text{ oder } x = \frac{D}{A}$$

und hier ist $\frac{D}{A}$ die Strecke, welche die Ebene von der x-Achse abschneidet. In ähnlicher Weise sind $\frac{D}{B}$ und $\frac{D}{C}$ die Abschnitte auf den Achsen der y und z, wie man auch durch Vergleichung mit Nr. 1) bestätigen kann.

Diese allgemeinen Ergebnisse erleiden unter Umständen einige Modificationen. Ist keine der Grössen A, B, C, D gleich Null, so kann die Gleichung 2) durch D dividirt und unter der etwas einfacheren Form

$$5) \qquad A'x + B'y + C'z = 1$$

dargestellt werden; die Gleichungen der Spuren lauten dann

$$6) \quad A'x + B'y = 1, \quad A'x + C'z = 1, \quad B'y + C'z = 1,$$

und die auf den Achsen gebildeten Abschnitte sind die reciproken Werthe von A', B', C'. Verschwindet eine der Grössen A, B, C, D und zwar zunächst D, so geht die zur Gleichung

$$Ax + By + Cz = 0$$

gehörende Ebene durch den Anfangspunkt der Coordinaten, weil die Werthe $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ der Gleichung genügen; nicht selten giebt man in diesem Falle der Gleichung die Form

$$7) \qquad z = A''x + B''y.$$

Ist $C = 0$, so wird aus der allgemeinen Gleichung die folgende

$$Ax + By = D, \quad (z \text{ beliebig})$$

oder

$$A'x + B'y = 1;$$

der auf der z-Achse gebildete Abschnitt hat die Grösse $\frac{D}{0} = \infty$ und mithin ist die Ebene parallel zur Achse der z; für $B = 0$ erhält man entsprechend eine Ebene parallel zur y-Achse, für $A = 0$ eine Parallelebene zur x-Achse. In dem Falle, wo die zwei Coefficienten C und D verschwinden, wird die Gleichung

$$Ax + By = 0$$

durch $x = 0$, $y = 0$, sowie durch jedes beliebige z befriedigt, woraus folgt, dass die Ebene die z-Achse in sich enthält. Liegt dagegen die y-Achse in der Ebene, so lautet die Gleichung der letzteren ($B = 0$, $D = 0$)

$$Ax + Cz = 0,$$

enthält sie die x-Achse, so ist $A = 0$ und $D = 0$, mithin

$$By + Cz = 0.$$

Sind zwei der Coefficienten A, B, C gleich Null, wie z. B. in

$$Ax = D,$$

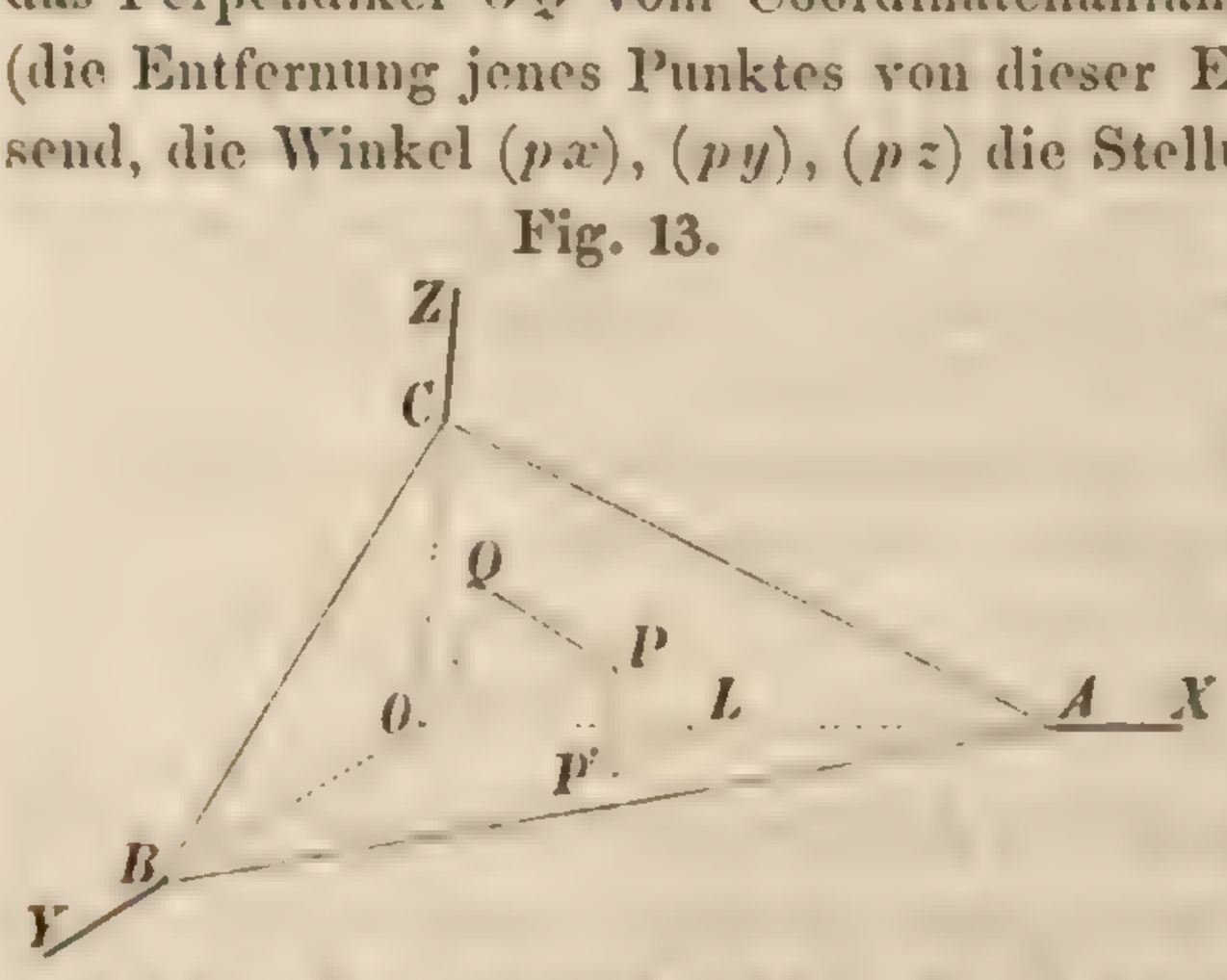
so bleiben y und z beliebig, mithin ist die Ebene parallel der yz-Ebene und von ihr entfernt um $\frac{D}{A}$; in gleicher Weise würden

$$By = D, \qquad Cz = D$$

Parallelebenen zu den Ebenen xz, resp. xy bedeuten. Für $D = 0$ reduciren sich die letzten drei Gleichungen auf $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und charakterisiren der Reihe nach die Coordinatenebenen yz, xz, xy.

Sowie jede Gerade eine bestimmte Richtung hat, welche durch die Winkel zwischen ihr und den Coordinatenachsen fixirt wird, so kann auch jeder Ebene eine bestimmte Stellung zugeschrieben werden, und zwar ergiebt sich diese aus der Richtung einer auf der Ebene errichteten Senkrechten. Bezeichnen wir mit p das Perpendikel OQ vom Coordinatenanfang auf die Ebene ABC (die Entfernung jenes Punktes von dieser Ebene), so ist es passend, die Winkel (px), (py), (pz) die Stellungswinkel der Ebéne zu nennen; sie können auf folgende Weise aus der Gleichung derselben abgeleitet werden. Wo auch der Punkt P auf der Ebene ABC liegen möge, so fällt seine rechtwinklige Projection auf die Normale OQ doch immer nach Q, demgemäss ist p die rechtwinklige Projection des Radiusvector OP, statt dessen auch die gebrochene Linie $OLP'P$ auf OQ projicirt werden kann; man hat daher die Beziehung

Fig. 13.



$$p = x\cos(px) + y\cos(py) + z\cos(pz)$$

oder auch durch Division mit p und umgekehrte Anordnung

$$\frac{\cos(px)}{p}x + \frac{\cos(py)}{p}y + \frac{\cos(pz)}{p}z = 1.$$

Der Vergleich zwischen dieser und der früheren Gleichung

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z = 1$$

liefert die Relationen

$$8)\quad \frac{\cos(px)}{p} = \frac{A}{D},\quad \frac{\cos(py)}{p} = \frac{B}{D},\quad \frac{\cos(pz)}{p} = \frac{C}{D},$$

die man auch unmittelbar durch Betrachtung der rechtwinkligen Dreiecke AQO, BQO, CQO erhalten kann. Die vorstehenden drei Gleichungen enthalten die vier Unbekannten p, $\cos(px)$, $\cos(py)$, $\cos(pz)$, von denen die drei letzteren für den Augenblick kurz ξ, η, ζ heissen mögen; dazu gesellt sich als vierte Gleichung die zwischen drei Richtungswinkeln jederzeit bestehende Relation (§. 4 Nr. 7)

$$9)\quad \begin{cases} (1-\alpha^2)\xi^2 + (1-\beta^2)\eta^2 + (1-\gamma^2)\zeta^2 \\ -2(\alpha-\beta\gamma)\eta\zeta - 2(\beta-\alpha\gamma)\xi\zeta - 2(\gamma-\alpha\beta)\xi\eta \\ = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2, \end{cases}$$

worin α, β, γ die Cosinus der Coordinatenwinkel yz, xz, xy bedeuten. Mittelst der Gleichungen 8) kann man ξ, η, ζ durch p ausdrücken, diese Werthe in Nr. 9) substituiren, daraus p und nachher ξ, η, ζ bestimmen; setzt man zur Abkürzung

$$10)\quad \delta^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

$$11)\quad \begin{cases} E^2 = (1-\alpha^2)A^2 + (1-\beta^2)B^2 + (1-\gamma^2)C^2 \\ \quad -2(\alpha-\beta\gamma)BC - 2(\beta-\alpha\gamma)AC - 2(\gamma-\alpha\beta)AB, \end{cases}$$

so sind die Ergebnisse der angedeuteten leichten Rechnung:

$$12)\quad \begin{cases} p = \dfrac{D\delta}{E}, \\ \cos(px) = \dfrac{A\delta}{E},\quad \cos(py) = \dfrac{B\delta}{E},\quad \cos(pz) = \dfrac{C\delta}{E}. \end{cases}$$

Nicht überflüssig ist es, die speciellen Formeln für die Fälle anzumerken, wo die beliebige Ebene einer der Coordinatenebenen parallel liegt. Ist erstens die Ebene parallel der yz-Ebene, also

$$x = a$$

ihre Gleichung, so haben wir $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = a$, folglich, wenn wir die Senkrechte p in diesem Falle mit p_x bezeichnen,

$$13)\quad p_x = \frac{a\delta}{\sqrt{1-\alpha^2}},\quad \cos(p_x x) = \frac{\delta}{\sqrt{1-\alpha^2}},\quad \cos(p_x y) = 0,\quad \cos(p_x z) = 0.$$

Auf ähnliche Weise finden wir, wenn die Ebene parallel zur xz-Ebene also ihre Gleichung

$$y = b$$

ist und p_y ihren Abstand vom Coordinatenanfang bezeichnet,

$$14)\quad p_y = \frac{b\delta}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \cos(p_y x) = 0,\quad \cos(p_y y) = \frac{\delta}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \cos(p_y z) = 0;$$

endlich für den dritten Fall, wo die Ebene parallel zur xy-Ebene liegt, ihre Gleichung

$$z = c$$

und p_z ihre Entfernung vom Coordinatenanfang ist,

$$15)\quad p_z = \frac{c\delta}{\sqrt{1-\gamma^2}},\quad \cos(p_z x) = 0,\quad \cos(p_z y) = 0,\quad \cos(p_z z) = \frac{\delta}{\sqrt{1-\gamma^2}}.$$

In Verbindung mit Nr. 12) führen die Gleichungen 13), 14) und 15) zur Kenntniss der Neigungswinkel einer beliebigen Ebene gegen die Coordinatenebenen. Bezeichnen wir die Neigungswinkel der Ebene 2) gegen die Ebenen yz, xz und xy der Reihe nach mit Θ_x, Θ_y, Θ_z, so ist Θ_x einerlei mit dem Winkel zwischen den auf jenen Ebenen senkrechten Geraden p und p_x, überhaupt

$$\Theta_x = \angle(pp_x),\quad \Theta_y = \angle(pp_y),\quad \Theta_z = \angle(pp_z);$$

man findet nun $\cos\Theta_x = \cos(pp_x)$ nach Formel 5) in §. 5 mittelst der Substitutionen $r = p$, $r_1 = p_x$,

$$\begin{aligned} \xi &= \cos(px), & \eta &= \cos(py), & \zeta &= \cos(pz),\\ \xi_1 &= \cos(p_x x), & \eta_1 &= \cos(p_x y), & \zeta_1 &= \cos(p_x z), \end{aligned}$$

wobei gleichzeitig die Werthe der rechter Hand stehenden Cosinus den Gleichungen 12) und 13) zu entnehmen sind. Auf analoge Weise bestimmen sich $\cos\Theta_y$ und $\cos\Theta_z$, überhaupt gelangt man durch die angedeutete leichte Rechnung zu den folgenden Formeln

$$16)\quad \begin{cases} \cos\Theta_x = \dfrac{A(1-\alpha^2) - B(\gamma - \alpha\beta) - C(\beta - \alpha\gamma)}{E\sqrt{1-\alpha^2}}, \\ \cos\Theta_y = \dfrac{B(1-\beta^2) - C(\alpha - \beta\gamma) - A(\gamma - \alpha\beta)}{E\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \cos\Theta_z = \dfrac{C(1-\gamma^2) - A(\beta - \alpha\gamma) - B(\alpha - \beta\gamma)}{E\sqrt{1-\gamma^2}}. \end{cases}$$

Bei einem rechtwinkligen Coordinatensysteme sind die Stellungswinkel (px), (py), (pz) identisch mit den Neigungswinkeln Θ_x, Θ_y, Θ_z, und es ist dann

$$17)\quad p = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$18)\quad \begin{cases} \cos(px) = \cos\Theta_x = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos(py) = \cos\Theta_y = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos(pz) = \cos\Theta_z = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{cases}$$

§. 15.

Bestimmung der Ebene durch drei Punkte.

Wenn eine Ebene, deren Gleichung

$$1)\qquad A'x + B'y + C'z = 1$$

sein möge, durch drei gegebene Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$, $f_3 g_3 h_3$ gehen soll, so muss ihre Gleichung von den Coordinaten der genannten Punkte befriedigt werden; man hat daher zur Bestimmung von A', B', C' die drei Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} A'f_1 + B'g_1 + C'h_1 = 1, \\ A'f_2 + B'g_2 + C'h_2 = 1, \\ A'f_3 + B'g_3 + C'h_3 = 1. \end{cases}$$

Durch Auflösung derselben erhält man für A', B', C' folgende Werthe

$$A' = \frac{(g_2h_3 - g_3h_2) + (g_3h_1 - g_1h_3) + (g_1h_2 - g_2h_1)}{f_1(g_2h_3 - g_3h_2) + f_2(g_3h_1 - g_1h_3) + f_3(g_1h_2 - g_2h_1)},$$

$$B' = \frac{(h_2f_3 - h_3f_2) + (h_3f_1 - h_1f_3) + (h_1f_2 - h_2f_1)}{g_1(h_2f_3 - h_3f_2) + g_2(h_3f_1 - h_1f_3) + g_3(h_1f_2 - h_2f_1)},$$

$$C' = \frac{(f_2g_3 - f_3g_2) + (f_3g_1 - f_1g_3) + (f_1g_2 - f_2g_1)}{h_1(f_2g_3 - f_3g_2) + h_2(f_3g_1 - f_1g_3) + h_3(f_1g_2 - f_2g_1)};$$

die Nenner dieser drei Brüche sind gleich und hier nur in verschiedenen Formen angegeben worden, um die regelmässige Bildung der Ausdrücke hervortreten zu lassen. Durch Substitution der obigen Werthe in die Gleichung 1) und bei Wegschaffung der Brüche ergiebt sich nun als Gleichung der verlangten Ebene:

$$3)\quad \begin{cases} [(g_2h_3 - g_3h_2) + (g_3h_1 - g_1h_3) + (g_1h_2 - g_2h_1)]\,x \\ + [(h_2f_3 - h_3f_2) + (h_3f_1 - h_1f_3) + (h_1f_2 - h_2f_1)]\,y \\ + [(f_2g_3 - f_3g_2) + (f_3g_1 - f_1g_3) + (f_1g_2 - f_2g_1)]\,z \\ = f_1(g_2h_3 - g_3h_2) + f_2(g_3h_1 - g_1h_3) + f_3(g_1h_2 - g_2h_1). \end{cases}$$

In speciellen Fällen vereinfacht sich diese Gleichung oft bedeutend; ist z. B. $f_3 = g_3 = h_3 = 0$, so bleibt

4) $(g_1 h_2 - g_2 h_1) x + (h_1 f_2 - h_2 f_1) y + (f_1 g_2 - f_2 g_1) z = 0$

als Gleichung der Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten und ausserdem durch die Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$ geht. Für $g_1 = h_1 = f_2 = h_2 = f_3 = g_3 = 0$ ergiebt sich

$$g_2 h_3 x + h_3 f_1 y + f_1 g_2 z = f_1 g_2 h_3$$

oder

$$\frac{x}{f_1} + \frac{y}{g_2} + \frac{z}{h_3} = 1$$

als Gleichung einer Ebene, welche auf den Coordinatenachsen der Reihe nach die Strecken f_1, g_2, h_3 abschneidet; dieses Resultat stimmt in der Hauptsache mit der Gleichung 1) des vorigen Paragraphen überein.

Wenn die Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$ und $f_3 g_3 h_3$ in einer Geraden liegen, so sind unendlich viel Ebenen durch dieselben möglich; dies zeigen auch die Gleichungen 2), sobald man ihnen die folgenden Formen ertheilt

$$A' f_1 + B' g_1 + C' h_1 = 1,$$

$$A' + B' \frac{g_3 - g_1}{f_3 - f_1} + C' \frac{h_3 - h_1}{f_3 - f_1} = 0,$$

$$A' + B' \frac{g_3 - g_2}{f_3 - f_2} + C' \frac{h_3 - h_2}{f_3 - f_2} = 0.$$

Unter der gemachten Voraussetzung ist nämlich nach §. 7 Gleichung 7)

$$\frac{g_3 - g_1}{f_3 - f_1} = \frac{g_3 - g_2}{f_3 - f_2}, \qquad \frac{h_3 - h_1}{f_3 - f_1} = \frac{h_3 - h_2}{f_3 - f_2},$$

die beiden letzten der obigen Gleichungen werden jetzt identisch und man hat nur noch zwei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten A', B', C'.

Die Gleichung 3) lehrt auch die Bedingung kennen, unter welcher vier gegebene Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$, $f_3 g_3 h_3$, $f_4 g_4 h_4$ in einer Ebene liegen. Dazu ist nämlich erforderlich, dass der vierte Punkt in der Ebene liegt, welche durch die ersten drei Punkte bestimmt wird; die gesuchte Bedingung lautet demnach:

5)
$$\begin{cases} [(g_2 h_3 - g_3 h_2) + (g_3 h_1 - g_1 h_3) + (g_1 h_2 - g_2 h_1)] f_4 \\ + [(h_2 f_3 - h_3 f_2) + (h_3 f_1 - h_1 f_3) + (h_1 f_2 - h_2 f_1)] g_4 \\ + [(f_2 g_3 - f_3 g_2) + (f_3 g_1 - f_1 g_3) + (f_1 g_2 - f_2 g_1)] h_4 \\ = f_1 (g_2 h_3 - g_3 h_2) + f_2 (g_3 h_1 - g_1 h_3) + f_3 (g_1 h_2 - g_2 h_1). \end{cases}$$

§. 16.

Verschiedene Lagen eines Punktes gegen eine Ebene.

Wenn ein Punkt xyz auf der durch die gegebenen Grössen A, B, C, D bestimmten Ebene liegt, so ist

1) $Ax + By + Cz = D$ oder $D - (Ax + By + Cz) = 0$,

bei jeder anderen Lage des Punktes kann diese Gleichung nicht mehr bestehen und es muss folglich für einen ausserhalb der Ebene befindlichen Punkt xyz die Differenz

$$D - (Ax + By + Cz)$$

einen von Null verschiedenen positiven oder negativen Werth besitzen. Um zu entscheiden, in welchen Fällen das positive und in welchen das negative Zeichen zum Vorschein kommt, stellen wir die folgende Betrachtung an.

Ausserhalb der durch die Gleichung 1) repräsentirten Ebene denken wir uns zwei beliebige Punkte P_1, P_2 und diese durch eine Gerade verbunden; nennen wir $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ die Coordinaten jener Punkte, so sind nach §. 7 II. die Gleichungen der Verbindungslinie

$$2) \quad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}, \quad z = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_2 - x_1}.$$

Diese Gerade schneidet die Ebene in einem Punkte P_0, dessen Coordinaten $x_0 y_0 z_0$ durch die Bemerkung gefunden werden, dass der Punkt P_0 gleichzeitig der Ebene und der Geraden angehört, dass folglich seine Coordinaten jeder der drei Gleichungen 1) und 2) genügen müssen; schreiben wir also in den letzteren x_0, y_0, z_0 für x, y, z, so haben wir drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten x_0, y_0, z_0; für die erste, die zu unserem Zwecke allein nöthig ist, erhalten wir

$$3) \quad x_0 = \frac{D(x_2 - x_1) - B(x_2 y_1 - x_1 y_2) - C(x_2 z_1 - x_1 z_2)}{A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1)}.$$

Hinsichtlich der Lage von P_0 zu P_1 und P_2 sind nun zwei Fälle möglich; befinden sich nämlich P_1 und P_2 auf einer und derselben Seite der Ebene, so liegt P_0 ausserhalb der Strecke $P_1 P_2$, liegen aber P_1 und P_2 auf entgegengesetzten Seiten der Ebene, so fällt P_0 zwischen die Punkte P_1 und P_2. Ganz Dasselbe gilt von den Projectionen der Punkte auf eine der Coordinatenachsen. Wählen wir zu letzterer die x-Achse, nennen der Reihe nach L_0, L_1, L_2 die Projectionen von P_0, P_1, P_2 auf OX, so ist $OL_0 = x_0$,

$OL_1 = x_1$, $OL_2 = x_2$; bei der ersten (gleichstimmigen) Lage von P_1 und P_2, also auch von L_1 und L_2, haben die Strecken $L_0L_1 = x_0 - x_1$ und $L_0L_2 = x_0 - x_2$ gleiche Vorzeichen, bei der zweiten Lage entgegengesetzte Vorzeichen, und es folgt daraus, dass das Product

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$$

im ersten Falle positiv, im zweiten negativ ist. Ebenso leicht bewahrheitet sich der umgekehrte Satz, dass das positive Vorzeichen des vorstehenden Productes die gleichstimmige, das negative die entgegengesetzte Lage der Punkte P_1 und P_2 bedingt. Vermöge des vorhin angegebenen Werthes von x_0 findet man nun, wenn zur Abkürzung

$$A + B\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + C\frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} = N$$

gesetzt wird,

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = \frac{(D - Ax_1 - By_1 - Cz_1)(D - Ax_2 - By_2 - Cz_2)}{N^2}$$

und daraus ergiebt sich, dass das im Zähler stehende Product positiv oder negativ ist, je nach dem die Punkte $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ auf gleichen oder verschiedenen Seiten der Ebene liegen. Dem zufolge haben die beiden Ausdrücke

$$D - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) \text{ und } D - (Ax_2 + By_2 + Cz_2)$$

im ersten Falle gleiche, im zweiten entgegengesetzte Vorzeichen. Um auch über letzteres unzweideutig zu entscheiden, wollen wir die in der Gleichung der Ebene vorkommende Grösse D immer als positiv betrachten, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit jederzeit möglich ist, weil im Falle eines negativen D die Gleichung 1) mit (-1) multiplicirt werden kann; für den Anfangspunkt der Coordinaten, als Punkt $x_1y_1z_1$ genommen, haben wir dann $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, mithin

$$D - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = D, \text{ d. h. positiv,}$$

besitzt nun der dem zweiten Punkte $x_2y_2z_2$ entsprechende Ausdruck

$$D - (Ax_2 + By_2 + Cz_2)$$

dasselbe, also positive Vorzeichen, so liegt der Punkt $x_2y_2z_2$ auf derselben Seite der Ebene, wie der Coordinatenanfang, ist aber die obige Differenz negativ, so fällt der Punkt $x_2y_2z_2$ auf die entgegengesetzte Seite. Bei Weglassung der ferner nicht nöthigen Indices können wir das Endresultat in dem Satze zusammenfassen: je nach dem der Ausdruck

$$D - (Ax + By + Cz),$$

worin D als wesentlich positiv angesehen wird, positiv, gleich Null oder negativ ist, liegt der Punkt xyz ausserhalb der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz = D$$

charakterisirten Ebene auf der Seite des Coordinatenanfanges, oder in der Ebene selbst, oder ausser ihr auf der dem Coordinatenanfang entgegengesetzten Seite.

§. 17.

Die Gerade in der Ebene.

Um zu entscheiden, ob eine gegebene Gerade in einer gleichfalls gegebenen Ebene liegt oder nicht, bedarf es nur der Untersuchung, ob irgend zwei Punkte der Geraden in die Ebene fallen oder nicht; bei der Willkürlichkeit dieser Punkte kann man sich jene Untersuchung dadurch erleichtern, dass man die Spuren der Geraden betrachtet; jenachdem dieselben in die Spuren der Ebene fallen oder nicht, liegt die Gerade in der Ebene oder ausser ihr. Ist nun

1) $$Ax + By + Cz = D$$

die Gleichung der Ebene, so sind der Reihe nach

$$Ax + By = D, \qquad Ax + Cz = D,$$
$$By + Cz = D$$

die Gleichungen ihrer xy, xz und yz-Spur; bezeichnen wir ferner mit

2) $$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, so haben wir als Coordinaten ihrer in gleicher Ordnung genommenen Spuren

$$x' = -\frac{c_1}{C_1}, \quad y' = b_1 - \frac{B_1 c_1}{C_1}; \quad x'' = -\frac{b_1}{B_1}, \; z'' = c_1 - \frac{C_1 b_1}{B_1};$$
$$y''' = b_1, \quad z''' = c_1.$$

Der Punkt $x'y'$ liegt nun in der xy-Spur der Ebene, wenn

3) $$-A\frac{c_1}{C_1} + B\left(b_1 - \frac{B_1 c_1}{C_1}\right) = D,$$

ferner liegt $x''z''$ in der xz-Spur der Ebene, wenn

4) $$-A\frac{b_1}{B_1} + C\left(c_1 - \frac{C_1 b_1}{B_1}\right) = D,$$

endlich $y'''z'''$ in der yz-Spur der Ebene, wenn

5) $$Bb_1 + Cc_1 = D.$$

Finden von diesen Gleichungen zwei statt, so ist die Gerade in der Ebene enthalten und die dritte Gleichung eine Folge der beiden anderen. Durch Subtraction der Gleichung 4) von 5) ergiebt sich noch

6) $$A + BB_1 + CC_1 = 0$$

und diese Gleichung kann in Verbindung mit Nr. 5) zum Ersatz für die früheren Gleichungen dienen; durch Elimination von C aus 5) und 6) erhält man nämlich die Gleichung 3), durch Elimination von B die Gleichung 4). Die Gleichungen 5) und 6) enthalten demnach die Bedingungen, unter welchen die Gerade in der Ebene liegt.

Dasselbe Resultat kann man leicht auf rein analytischem Wege finden; jeder Punkt der Geraden muss nämlich ein Punkt der Ebene sein, es ist folglich erlaubt, die Werthe von y und z aus Nr. 2) in Nr. 1) zu substituiren, die letztere Gleichung erhält dadurch die Form

$$(A + BB_1 + CC_1)\,x + Bb_1 + Cc_1 = D$$

und sie muss nun für a l l e x gelten; dies ist aber nur möglich für

7) $$A + BB_1 + CC_1 = 0 \text{ und } Bb_1 + Cc_1 = D,$$

welche Bedingungen mit den früheren übereinstimmen.

Hieran knüpfen sich einige Aufgaben, betreffend die Bestimmung solcher Ebenen, die eine oder zwei gegebene Gerade enthalten sollen.

α. Ebene durch einen Punkt und eine gegebene Gerade. Sind f, g, h die Coordinaten des gegebenen Punktes,

8) $$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, endlich

9) $$A'x + B'y + C'z = 1$$

die Gleichung der verlangten Ebene, so hat man zur Bestimmung von A', B', C' die drei Gleichungen

$$A'f + B'g + C'h = 1,$$

$$A' + B'B_1 + C'C_1 = 0, \qquad B'b_1 + C'c_1 = 1$$

aus denen jene Unbekannten leicht zu entwickeln sind. Etwas kürzer ist folgender Weg; man subtrahirt die erste der Bedingungsgleichungen von der Gleichung der Ebene (Nr. 9), dividirt überall mit A' und setzt zur Abkürzung

$$\frac{B'}{A'} = M, \qquad \frac{C'}{A'} = N,$$

die Gleichung der gesuchten Ebene ist dann

10) $$x - f + M(y - g) + N(z - h) = 0.$$

Durch Division mit A' ergiebt sich ferner aus der zweiten Bedingung die folgende

$$B_1 M + C_1 N = -1;$$

subtrahirt man endlich die erste Bedingungsgleichung von der letzten und dividirt wiederum durch A', so ist

$$(b_1 - g) M + (c_1 - h) N = f.$$

Die letzten zwei Gleichungen bestimmen M und N; nach Wegschaffung der Brüche erhält man aus Nr. 10)

11) $$\begin{cases} [B_1(c_1 - h) - C_1(b_1 - g)](x - f) \\ -(C_1 f + c_1 - h)(y - g) + (B_1 f + b_1 - g)(z - h) = 0 \end{cases}$$

als Gleichung der gesuchten Ebene. Liegt der Punkt fgh in der gegebenen Geraden, ist also gleichzeitig

$$g = B_1 f + b_1, \qquad h = C_1 f + c_1$$

so werden die beiden für M und N angegebenen Gleichungen identisch und es bleibt daher eine dieser Grössen willkürlich, wie es die in diesem Falle vorhandene Unbestimmtheit der Aufgabe erfordert.

β. Ebene durch zwei Gerade. Wenn eine Ebene, deren Gleichung

12) $$A' x + B' y + C' z = 1$$

heissen möge, zwei durch die Gleichungen

13) $$\begin{cases} y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2, \end{cases}$$

gegebene Gerade in sich enthalten soll, so müssen die Coefficienten A', B', C' den folgenden vier Gleichungen genügen

$$A' + B_1 B' + C_1 C' = 0, \qquad b_1 B' + c_1 C' = 1,$$
$$A' + B_2 B' + C_2 C' = 0, \qquad b_2 B' + c_2 C' = 1.$$

Man kann hier zunächst B' und C' aus denjenigen zwei Gleichungen bestimmen, in denen A' nicht vorkommt und findet:

$$B' = -\frac{c_1 - c_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1}, \qquad C' = +\frac{b_1 - b_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1};$$

die beiden übrigen Gleichungen liefern nachher zwei Werthe von A', nämlich:

$$A' = \frac{B_1(c_1 - c_2) - C_1(b_1 - b_2)}{b_1 c_2 - b_2 c_1},$$

$$A' = \frac{B_2(c_1 - c_2) - C_2(b_1 - b_2)}{b_1 c_2 - b_2 c_1}.$$

Da A' nur einen Werth haben kann, so ist die Aufgabe unmög-

lich, wenn die beiden für A' gefundenen Ausdrücke verschieden sind, möglich dagegen, sobald jene Ausdrücke zusammenfallen. Das Letztere findet statt für

$$B_1(c_1 - c_2) - C_1(b_1 - b_2) = B_2(c_1 - c_2) - C_2(b_1 - b_2)$$

oder

$$14) \qquad (B_1 - B_2)(c_1 - c_2) = (C_1 - C_2)(b_1 - b_2)$$

d. h. wenn die Geraden sich entweder schneiden oder parallel laufen. Die vorstehende Bedingung ist identisch mit der schon früher (§. 8) erwähnten, nach welcher zwei Gerade in einer Ebene liegen oder nicht, je nach dem die obige Gleichung erfüllt oder nicht erfüllt ist. Das Bestehen der Gleichung 14) vorausgesetzt, haben wir als Gleichung der gesuchten Ebene:

$$15) \quad [B_1(c_1 - c_2) - C_1(b_1 - b_2)]x - (c_1 - c_2)y + (b_1 - b_2)z = b_1 c_2 - b_2 c_1.$$

Ist $b_1 c_2 = b_2 c_1$, was geometrisch bedeutet, dass die Verbindungslinie der yz-Spuren $b_1 c_1$ und $b_2 c_2$ durch den Coordinatenanfang geht, so verschwindet die rechte Seite der obigen Gleichung und die Ebene beider Geraden geht dann gleichfalls durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

§. 18.

Parallele Lage einer Geraden gegen eine Ebene.

Wenn eine Ebene und ausserhalb derselben eine Gerade gegeben sind, so kann man die Frage, ob die Gerade die Ebene schneidet oder ihr parallel ist, dadurch entscheiden, dass man durch irgend einen Punkt der Ebene eine Parallele zur Geraden legt; diese Parallele hat mit der Ebene entweder nur jenen einzigen Punkt oder alle Punkte gemein, im ersten Falle schneidet die Gerade die Ebene, im zweiten Falle ist sie ihr parallel, weil sie einer in der Ebene liegenden Geraden parallel läuft. Das genannte Kennzeichen drücken wir auf folgende Weise analytisch aus. Die Gleichung der Ebene sei

$$1) \qquad Ax + By + Cz = D,$$

die Gleichungen der Geraden mögen heissen

$$2) \qquad y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1;$$

für irgend einen Punkt $x_0 y_0 z_0$ der gegebenen Ebene gilt die Gleichung

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D,$$

und wenn wir sie mit der Gleichung 1) durch Subtraction verbinden, so ist

3) $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

immer noch die Gleichung derselben Ebene nur mit der Nebenbestimmung, dass letztere den Punkt $x_0 y_0 z_0$ enthält. Die Gleichungen einer durch diesen Punkt gehenden Parallelen zur gegebenen Geraden sind

4) $$y-y_0=B_1(x-x_0), \qquad z-z_0=C_1(x-x_0)$$

und wenn die Parallele ganz in der Ebene liegen soll, so müssen die Coordinaten jedes ihrer Punkte sowohl den Gleichungen 4) als der Gleichung 3) genügen; dies giebt für jedes beliebige x

$$(A+BB_1+CC_1)(x-x_0)=0$$

was nur möglich ist, wenn die Gleichung

5) $$A+BB_1+CC_1=0$$

statt findet; diese ist folglich die Bedingungsgleichung für die parallele Lage der Geraden gegen die Ebene*).

Hieran knüpfen sich einige Aufgaben über die Bestimmung einer Ebene, welche einer oder zwei gegebenen Geraden parallel sein soll.

α. Ebene durch zwei Punkte parallel einer Geraden. Die gegebenen Punkte mögen $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$ und die Gleichungen der gegebenen Geraden

6) $$y=Bx+b, \qquad z=Cx+c$$

heissen; die Gleichung der gesuchten Ebene sei

7) $$Lx+My+Nz=1.$$

Dass die Ebene durch jene zwei Punkte geht, wird ausgedrückt durch die beiden Gleichungen

$$Lf_1+Mg_1+Nh_1=1,$$
$$Lf_2+Mg_2+Ng_2=1;$$

die parallele Lage der Ebene und der Geraden liefert hierzu noch die Bedingung

$$L+MB+NC=0,$$

---

*) Die im vorigen Paragraphen unter Nr. 7) verzeichneten Bedingungen für den Fall, dass die Gerade in der Ebene liegt, erhalten durch das Obige eine sehr einfache Bedeutung. Von jenen zwei Bedingungsgleichungen sagt nämlich die erste, dass die Gerade der Ebene parallel ist, und die zweite, dass die yz-Spur der Geraden in der gleichnamigen Spur der Ebene liegt, dass also beide Gebilde einen Punkt gemein haben; diese Bedingungen sind zusammen nur von einer in der Ebene enthaltenen Geraden erfüllt.

und damit hat man drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten L, M und N. Man findet für sie die Werthe

$$L = \frac{B(h_1 - h_2) - C(g_1 - g_2)}{(g_1 - Bf_1)(h_2 - Cf_2) - (g_2 - Bf_2)(h_1 - Cf_1)},$$

$$M = \frac{-(h_1 - h_2) + C(f_1 - f_2)}{(g_1 - Bf_1)(h_2 - Cf_2) - (g_2 - Bf_2)(h_1 - Cf_1)},$$

$$N = \frac{+(g_1 - g_2) - B(f_1 - f_2)}{(g_1 - Bf_1)(h_2 - Cf_2) - (g_2 - Bf_2)(h_1 - Cf_1)};$$

durch Substitution in Nr. 7) und Wegschaffung der Brüche ergiebt sich

$$8)\quad \begin{cases} [B(h_1 - h_2) - C(g_1 - g_2)]\,x \\ -[h_1 - h_2 - C(f_1 - f_2)]\,y + [g_1 - g_2 - B(f_1 - f_2)]\,z \\ = (g_1 - Bf_1)(h_2 - Cf_2) - (g_2 - Bf_2)(h_1 - Cf_1) \end{cases}$$

als Gleichung der gesuchten Ebene.

β. Ebene durch eine Gerade parallel einer zweiten Geraden. Die beiden gegebenen Geraden mögen durch die Gleichungen

$$9)\quad \begin{cases} y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2, \end{cases}$$

bestimmt sein, die Gleichung der gesuchten Ebene heisse

$$10)\qquad Lx + My + Nz = 1.$$

Soll diese Ebene die erste Gerade in sich enthalten, so müssen die Bedingungen

$$L + B_1 M + C_1 N = 0, \qquad b_1 M + c_1 N = 1$$

erfüllt sein, und wenn sie ausserdem der zweiten Geraden parallel liegen soll, so gehört dazu

$$L + B_2 M + C_2 N = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich für die Unbekannten L, M, N die Werthe

$$L = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{b_1(C_1 - C_2) - c_1(B_1 - B_2)},$$

$$M = \frac{C_1 - C_2}{b_1(C_1 - C_2) - c_1(B_1 - B_2)},$$

$$N = \frac{-(B_1 - B_2)}{b_1(C_1 - C_2) - c_1(B_1 - B_2)};$$

durch Substitution dieser Ausdrücke erhält man aus Nr. 10)

$$11)\quad \begin{cases} (B_1 C_2 - B_2 C_1)\,x + (C_1 - C_2)\,y - (B_1 - B_2)\,z \\ = b_1(C_1 - C_2) - c_1(B_1 - B_2) \end{cases}$$

als Gleichung der verlangten Ebene.

γ. **Ebene durch einen Punkt parallel zwei Geraden.** Bezeichnen wir die Coordinaten des gegebenen Punktes mit f, g, h, die Gleichungen der gegebenen Geraden und der gesuchten Ebene ganz wie vorhin, so haben wir zur Bestimmung der Unbekannten L, M, N die drei Gleichungen

$$Lf + Mg + Nh = 1,$$
$$L + B_1 M + C_1 N = 0,$$
$$L + B_2 M + C_2 N = 0;$$

die Ermittelung von L, M, N bietet keine Schwierigkeit dar und mag unterbleiben, weil sich die Rechnung eleganter auf folgende Weise führen lässt. Wir ziehen die erste Bedingungsgleichung von der Gleichung der Ebene ab, dividiren mit L und setzen zur Abkürzung

$$\frac{M}{L} = P, \qquad \frac{N}{L} = Q;$$

die Gleichung der Ebene lautet dann

12) $$x - f + P(y - g) + Q(z - h) = 0.$$

Die übrigen Bedingungsgleichungen dividiren wir gleichfalls mit L und haben dann zur Bestimmung von P und Q die Gleichungen

$$1 + B_1 P + C_1 Q = 0,$$
$$1 + B_2 P + C_2 Q = 0;$$

hieraus ergeben sich die Werthe

$$P = \frac{C_1 - C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}, \qquad Q = -\frac{B_1 - B_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1};$$

durch Substitution derselben in Nr. 12) erhalten wir nach Wegschaffung der Brüche

13) $$(B_1 C_2 - B_2 C_1)(x - f) + (C_1 - C_2)(y - g) - (B_1 - B_2)(z - h) = 0$$

als Gleichung der verlangten Ebene.

§. 19.

Senkrechte Lage einer Geraden gegen eine Ebene.

Wenn eine Ebene, deren Gleichung

1) $$Ax + By + Cz = D$$

heissen möge, normal zu einer durch die Gleichungen

2) $$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

bestimmten Geraden liegen soll, so müssen die Stellungswinkel der Ebene der Reihe nach dieselben sein, wie die Richtungswinkel der Geraden, es gelten daher, wenn die vom Coordinatenanfange

auf die Ebene herabgelassene Senkrechte mit p und die Gerade mit s_1 bezeichnet wrid, die Gleichungen

3) $cos(px) = cos(s_1x)$, $cos(py) = cos(s_1y)$, $cos(pz) = cos(s_1z)$.

Unter Benutzung der schon früher gebrauchten Abkürzungen

$$cos(xy) = \gamma, \qquad cos(xz) = \beta, \qquad cos(yz) = \alpha,$$

$$\delta^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

$$E^2 = (1-\alpha^2)A^2 + (1-\beta^2)B^2 + (1-\gamma^2)C^2$$
$$- 2(\alpha - \beta\gamma)BC - 2(\beta - \alpha\gamma)AC - 2(\gamma - \alpha\beta)AB,$$

$$D_1^2 = 1 + B_1^2 + C_1^2 + 2\alpha B_1 C_1 + 2\beta C_1 + 2\gamma B_1$$

sind die Stellungswinkel der Ebene durch die Formeln

$$cos(px) = \frac{A\delta}{E}, \quad cos(py) = \frac{B\delta}{E}, \quad cos(pz) = \frac{C\delta}{E},$$

und die Richtungswinkel der Geraden durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$cos(s_1x) = \frac{1 + B_1\gamma + C_1\beta}{D_1},$$

$$cos(s_1y) = \frac{B_1 + \gamma + C_1\alpha}{D_1},$$

$$cos(s_1z) = \frac{C_1 + \beta + B_1\alpha}{D_1};$$

bildet man aus diesen Werthen die in Nr. 3) erwähnten Gleichungen, so kann man letztere leicht auf folgende Form bringen:

4) $$\begin{cases} \frac{D_1\delta}{E} = \frac{1 + B_1\gamma + C_1\beta}{A} \\ = \frac{B_1 + \gamma + C_1\alpha}{B} = \frac{C_1 + \beta + B_1\alpha}{C}, \end{cases}$$

und sie sind die analytischen Bedingungen für die gegenseitige senkrechte Lage der Ebene und der Geraden. Zu bemerken ist übrigens, dass von den Gleichungen 3) oder den damit identischen drei Gleichungen in Nr. 4) bereits zwei ausreichen, um die erwähnte Lage festzustellen; da nämlich die Richtung einer Geraden (p oder s_1) schon durch zwei Richtungswinkel bestimmt wird, so ist jede der Gleichungen 3) eine Folge der beiden übrigen und eben desswegen braucht man auch von den Gleichungen 4) nur zwei beizubehalten. Dies geschieht am einfachsten dadurch, dass man den ersten Quotienten rechter Hand mit den beiden übrigen Quotienten vergleicht; man hat so

5) $$\frac{B}{A} = \frac{B_1 + C_1\alpha + \gamma}{1 + B_1\gamma + C_1\beta}, \qquad \frac{C}{A} = \frac{C_1 + B_1\alpha + \beta}{1 + B_1\gamma + C_1\beta}$$

oder auch, wenn man die Brüche wegschafft und die gleichartigen Grössen vereinigt

$$6)\quad \begin{cases} (A - B\gamma)\,B_1 + (A\alpha - B\beta)\,C_1 = B - A\gamma \\ (A\alpha - C\gamma)\,B_1 + (A - C\beta)\,C_1 = C - A\beta. \end{cases}$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem hat man einfacher

$$7)\quad \frac{B}{A} = B_1,\quad \frac{C}{A} = C_1 \text{ oder } AB_1 = B,\quad AC_1 = C.$$

Hieran knüpfen sich die folgenden zwei Aufgaben.

α. Durch einen gegebenen Punkt eine Normalebene zu einer gegebenen Geraden zu legen. Die Coordinaten des gegebenen Punktes mögen f, g, h, die Gleichungen der gegebenen Geraden

$$8)\qquad y = B_1 x + b_1,\qquad z = C_1 x + c_1$$

sein, und die Gleichung der gesuchten Ebene heisse

$$Ax + By + Cz = D.$$

Da letztere durch den Punkt fgh gehen soll, so hat man erstlich

$$Af + Bg + Ch = D$$

und durch Subtraction dieser Gleichung von der vorigen ergiebt sich nach Division mit A

$$9)\qquad x - f + \frac{B}{A}(y - g) + \frac{C}{A}(z - h) = 0;$$

dies ist immer noch die Gleichung der gesuchten Ebene, nur unter Einrechnung der ersten angegebenen Bedingung. Die senkrechte Lage der Geraden gegen die Ebene verlangt ferner das Stattfinden der Gleichungen 5); setzt man die hierdurch bestimmten Werthe von $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$ in die Gleichung 9) ein, so erhält man nach Wegschaffung der Brüche

$$10)\quad \begin{cases} (1 + B_1\gamma + C_1\beta)\,(x - f) \\ + (B_1 + C_1\alpha + \gamma)\,(y - g) + (C_1 + B_1\alpha + \beta)\,(z - h) = 0, \end{cases}$$

und einfacher bei rechtwinkligen Coordinaten

$$11)\qquad (x - f) + B_1(y - g) + C_1(z - h) = 0$$

als Gleichung der verlangten Ebene.

Die hiermit bestimmte Ebene schneidet die gegebene Gerade in einem Punkte, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 sich mittelst der Bemerkung finden lassen, dass sie den Gleichungen 8) und 10) gleichzeitig genügen müssen, weil der Punkt $x_0 y_0 z_0$ sowohl der Ebene als der Geraden angehört; schreiben wir also in 8) und 10) x_0, y_0, z_0 für x, y, z, so haben wir drei Gleichungen ersten Gra-

des zur Bestimmung der gesuchten Coordinaten. Diese Andeutung möge genügen, da die Rechnung keine Schwierigkeiten darbietet. Endlich bestimmt sich noch die Entfernung der Punkte $x_0 y_0 z_0$ und fgh mittelst der bekannten Formel

$$e^2 = (x_0 - f)^2 + (y_0 - g)^2 + (z_0 - h)^2$$
$$+ 2(x_0 - f)(y_0 - g)\gamma + 2(x_0 - f)(z_0 - h)\beta + 2(y_0 - g)(z_0 - h)\alpha,$$

in welche man die auf die erwähnte Weise gefundenen Werthe von x_0, y_0 und z_0 substituiren kann.

β. Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade. Die gegebene Ebene habe zur Gleichung

$$12) \qquad Ax + By + Cz = D,$$

die Coordinaten des gegebenen Punktes mögen f, g, h heissen und durch ihn werde senkrecht zur Ebene eine Gerade gelegt, deren Gleichungen wir mit

$$13) \qquad y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

bezeichnen. Die Bedingung, dass diese Gerade durch den Punkt fgh gehen soll, liefert die Gleichungen

$$g = B_1 f + b_1, \qquad h = C_1 f + c_1,$$

welche, mit den vorigen verbunden,

$$14) \qquad y - g = B_1 (x - f), \qquad z - h = C_1 (x - f)$$

als Gleichungen der gesuchten Normalen geben. Um die noch übrigen Unbekannten B_1 und C_1 zu bestimmen, erinnern wir an die Gleichungen 6), welche die senkrechte Lage der Geraden gegen die Ebene ausdrücken; setzen wir zur Abkürzung

$$15) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = (1 - \alpha^2) A - (\gamma - \alpha\beta) B - (\beta - \alpha\gamma) C, \\ \mathfrak{B} = (1 - \beta^2) B - (\alpha - \beta\gamma) C - (\gamma - \alpha\beta) A, \\ \mathfrak{C} = (1 - \gamma^2) C - (\beta - \alpha\gamma) A - (\alpha - \beta\gamma) B, \end{cases}$$

so erhalten wir durch Auflösung der Gleichungen 6) die Werthe

$$B_1 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}, \qquad C_1 = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}},$$

mithin sind die Gleichungen der verlangten Normalen

$$16) \qquad y - g = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}(x - f), \qquad z - h = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}(x - f).$$

Um den Durchschnitt dieser Geraden mit der Ebene, d. h. den Fusspunkt des vom Punkte fgh auf die Ebene herabgelassenen Perpendikels zu finden, bemerken wir, dass die Coordinaten jenes Punktes, welche x_0, y_0, z_0 heissen mögen, den Gleichungen 12) und 16) zusammen genügen müssen; durch Auflösung derselben ergeben sich die Werthe

17)
$$\begin{cases} x_0 = f + \dfrac{D-(Af+Bg+Ch)}{A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}}\mathfrak{A}, \\ y_0 = g + \dfrac{D-(Af+Bg+Ch)}{A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}}\mathfrak{B}, \\ z_0 = h + \dfrac{D-(Af+Bg+Ch)}{A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}}\mathfrak{C}. \end{cases}$$

Der in den Quotienten vorkommende gemeinschaftliche Nenner $A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}$ ist übrigens einerlei mit der anfangs dieses Paragraphen erwähnten Grösse E^2.

Endlich können wir noch die Entfernung der Punkte fgh und $x_0y_0z_0$, d. h. den Abstand des Punktes fgh von der gegebenen Ebene bestimmen; bezeichnen wir ihn mit q, so ist

$$q^2 = (x_0-f)^2+(y_0-g)^2+(z_0-h)^2 + 2(x_0-f)(y_0-g)\gamma+2(x_0-f)(z_0-h)\beta+2(y_0-g)(z_0-h)\alpha,$$

wo noch die Werthe von x_0, y_0, z_0 aus Nr. 17) zu substituiren sind. Um diese Substitution bequem ausführen zu können, setzen wir zuerst, wie schon erwähnt,

$$A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C} = E^2,$$

und

$$D-(Af+Bg+Ch) = \Delta;$$

dies giebt bei Absonderung der gemeinschaftlichen Factoren

$$q^2 = \frac{\Delta^2}{E^4}(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\gamma+2\mathfrak{A}\mathfrak{C}\beta+2\mathfrak{B}\mathfrak{C}\alpha)$$

wobei für den Augenblick der Parentheseninhalt Σ, mithin die Formel

18)
$$q^2 = \frac{\Delta^2}{E^4}\Sigma.$$

heissen möge. Wollte man nun, wie es als das Nächstliegende erscheint, den Ausdruck Σ dadurch auf seine einfachste Form bringen, dass man die Werthe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ substituirte und die gleichartigen Grössen vereinigte, so würde man auf eine äusserst weitläufige Rechnung eingehen müssen, welcher sich das einfache Endresultat nicht leicht absehen liesse. Dagegen führt kurz die Bemerkung zum Ziele, dass die Grössen E und Σ zwar von A, B, C, α, β, γ, nicht aber von f, g, h abhängig sind, dass sie folglich für eine bestimmte Ebene dieselben bleiben, wo auch der Punkt fgh liegen möge; nehmen wir speciell $f=g=h=0$, so wird $\Delta = D$, $q = p$, und die aus Nr. 18) entspringende Gleichung

$$p^2 = \frac{D^2}{E^4}\,\Sigma$$

muss jetzt mit der früheren Gleichung (§. 14, Formel 12)

$$p^2 = \frac{D^2\,\delta^2}{E^2}$$

übereinstimmen. Die Vergleichung liefert den Werth $\Sigma = \delta^2 E^2$ und aus der Formel 18) ergiebt sich nun

19) $$q = \frac{D - (Af + Bg + Ch)}{E}\,\delta.$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem vereinfachen sich alle diese Ergebnisse; die Bedingungen für die normale Lage der Geraden gegen die Ebene lauten in diesem Falle

$$B_1 = \frac{B}{A}, \qquad C_1 = \frac{C}{A}$$

und bedeuten geometrisch, dass die Projectionen der Geraden senkrecht auf den gleichnamigen Spuren der Ebene stehen, wie auch aus der descriptiven Geometrie bekannt ist; die Gleichungen der Normalen sind

20) $$y - g = \frac{B}{A}(x - f), \qquad z - h = \frac{C}{A}(x - f);$$

die Coordinaten ihres Durchschnittes mit der Ebene:

21) $$\begin{cases} x_0 = f + \dfrac{D - (Af + Bg + Ch)}{A^2 + B^2 + C^2}\,A, \\ y_0 = g + \dfrac{D - (Af + Bg + Ch)}{A^2 + B^2 + C^2}\,B, \\ z_0 = h + \dfrac{D - (Af + Bg + Ch)}{A^2 + B^2 + C^2}\,C; \end{cases}$$

und der Abstand des Punktes von der Ebene:

22) $$q = \frac{D - (Af + Bg + Ch)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Nehmen wir, wie früher, die in Nr. 19) vorkommenden Grössen δ und E, welche durch Wurzelziehung bestimmt werden, im absoluten Sinne und ebenso die in Nr. 22) vorkommende Wurzel, so ist q positiv oder negativ, jenachdem $D - (Af + Bg + Ch)$ positiv oder negativ ausfällt; das Perpendikel q erhält demnach das positive Vorzeichen, wenn sich der Punkt fgh auf derselben Seite der Ebene befindet, wie der Coordinatenanfang, das negative Zeichen, wenn fgh und der Coordinatenanfang zu entgegengesetzten Seiten der Ebene liegen.

γ. Die im vorigen Abschnitte entwickelten Formeln für q bestimmen auch den gegenseitigen Abstand einer Ebene und einer ihr parallelen Geraden. Sind nämlich

$$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1,$$

worin B_1 und C_1 der Bedingung

$$A + B B_1 + C C_1 = 0$$

genügen, die Gleichungen der parallelen Geraden, so hat man nur festzusetzen, dass der Punkt $f g h$ dieser Geraden angehört, dass also die Gleichungen

$$g = B_1 f + b_1, \qquad h = C_1 f + c_1$$

statt finden; die Entfernung q des Punktes von der Ebene ist dann einerlei mit dem Abstande der Geraden von derselben Ebene. Man hat nun nach Formel 19) unter Substitution der für g und h angegebenen Werthe

$$q = \frac{D - [(A + B B_1 + C C_1) f + B b_1 + C c_1]}{E} \delta$$

und bei Rücksicht auf die parallele Lage der Geraden gegen die Ebene

$$23) \qquad q = \frac{D - (B b_1 + C c_1)}{E} \delta.$$

Bei rechtwinkligen Coordinaten ist

$$24) \qquad q = \frac{D - (B b_1 + C c_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Die Vorzeichen von q befolgen selbstverständlich dieselbe Regel wie vorhin.

§. 20.

Beliebige Lage einer Geraden gegen eine Ebene.

Eine Ebene, deren Gleichung

$$1) \qquad A x + B y + C z = D$$

sein möge, hat mit einer durch die Gleichungen

$$2) \qquad y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c$$

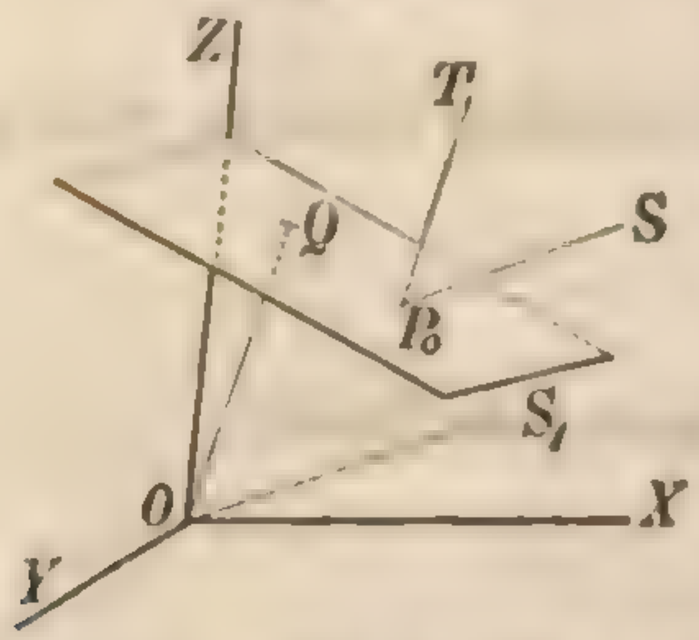
dargestellten Geraden im Allgemeinen einen Punkt, den Durchschnitt beider Gebilde, gemein; die Coordinaten x_0, y_0, z_0 desselben ergeben sich aus der Bemerkung, dass sie den Gleichungen 1) und 2) zusammen genügen müssen, schreibt man also in letzteren x_0, y_0, z_0 für x, y, z, so hat man drei Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten. Man findet hiernach für die Coordinaten des Durchschnittspunktes die Werthe

$$3)\quad \begin{cases} x_0 = -\dfrac{Bb_1 + Cc_1 - D}{A + BB_1 + CC_1}, \\ y_0 = \dfrac{Ab_1 + C(b_1C_1 - c_1B_1) + DB_1}{A + BB_1 + CC_1}, \\ z_0 = \dfrac{Ac_1 + B(c_1B_1 - b_1C_1) + DC_1}{A + BB_1 + CC_1}. \end{cases}$$

Im Allgemeinen sind diese Ausdrücke endliche Grössen, sie können aber unter Umständen unendlich oder unbestimmt werden. Ist erstens der gemeinschaftliche Nenner der obigen Brüche gleich Null, ohne dass aber einer der Zähler verschwindet, so wird jede der Coordinaten x_0, y_0, z_0 unendlich gross, die Gerade hat dann mit der Ebene nur einen unendlich entfernten Punkt gemein, d. h. sie ist ihr parallel (vergl. §. 18); verschwinden der Nenner und alle Zähler der vorigen Brüche gleichzeitig, so erhalten x_0, y_0, z_0 die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, d. h. jeder Punkt der Geraden ist ein **Punkt der Ebene (vergl. §. 17).**

Um zweitens den Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene zu bestimmen, denken wir uns in dem Durchschnittspunkte P_0 beider Gebilde eine Normale P_0T auf der Ebene errichtet; der Neigungswinkel, welcher ω heissen möge, ist dann das Complement

Fig. 14.



des Winkels SP_0T zwischen der Geraden und der Normalen, mithin $\sin\omega = \cos SP_0T$. Da ferner die Normale P_0T parallel zu der Entfernung der Ebene vom Coordinatenanfang liegt, so können wir $\angle SP_0T$ auch als den Winkel zwischen $OQ = p$ und der Geraden $P_0S = s$ bezeichnen, mithin

$$4)\quad \sin\omega = \cos(ps)$$

setzen. Der Winkel (ps) lässt sich als Winkel zwischen zwei Vectoren betrachten, wenn man durch den Coordinatenanfang eine Gerade $s_1 \parallel s$ zieht, man hat dann nach Formel 5) in §. 5

$$5)\quad \begin{cases} \sin\omega = \cos(ps_1) \\ = \dfrac{1}{\delta^2}\{(1-\alpha^2)\xi\xi_1 + (1-\beta^2)\eta\eta_1 + (1-\gamma^2)\zeta\zeta_1 \\ \quad -(\alpha-\beta\gamma)(\eta\zeta_1 + \eta_1\zeta) - (\beta-\alpha\gamma)(\xi\zeta_1 + \xi_1\zeta) \\ \quad -(\gamma-\alpha\beta)(\xi\eta_1 + \xi_1\eta)\} \end{cases}$$

und zwar ist dabei

$$6)\quad \begin{cases} \delta^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2, \\ \xi = cos\,(px), \quad \eta = cos\,(py), \quad \zeta = cos\,(pz), \\ \xi_1 = cos\,(s_1 x), \quad \eta_1 = cos\,(s_1 y), \quad \zeta_1 = cos\,(s_1 z). \end{cases}$$

Die Werthe der hier vorkommenden Cosinus sind unmittelbar bekannt; nach Nr. 12) in §. 14 hat man

$$\xi = \frac{A\delta}{E}, \qquad \eta = \frac{B\delta}{E}, \qquad \zeta = \frac{C\delta}{E},$$

wo δ die obige Bedeutung hat und

$$7)\quad \begin{cases} E^2 = (1-\alpha^2)A^2 + (1-\beta^2)B^2 + (1-\gamma^2)C^2 \\ \quad -2(\alpha-\beta\gamma)BC - 2(\beta-\alpha\gamma)AC - 2(\gamma-\alpha\beta)AB \end{cases}$$

ist, ferner hat man nach §. 6 Nr. 7)

$$\xi_1 = \frac{1 + B_1\gamma + C_1\beta}{D_1},$$

$$\eta_1 = \frac{B_1 + C_1\alpha + \gamma}{D_1},$$

$$\zeta_1 = \frac{C_1 + B_1\alpha + \beta}{D_1},$$

und darin

$$8)\quad D_1^2 = 1 + B_1^2 + C_1^2 + 2\alpha B_1 C_1 + 2\gamma B_1 + 2\beta C_1.$$

Substituirt man die für ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 angegebenen Werthe in die Formel 5) und fasst die gleichartigen Glieder zusammen, so findet man, dass die Coefficienten von

$$AB_1, \quad AC_1, \quad BC_1, \quad CB_1, \quad B, \quad C$$

verschwinden und dass folgender Ausdruck übrig bleibt:

$$sin\,\omega = \frac{A}{\delta E D_1}\left\{1 - \alpha^2 - \beta(\beta - \alpha\gamma) - \gamma(\gamma - \alpha\beta)\right\}$$
$$+ \frac{BB_1}{\delta E D_1}\left\{1 - \beta^2 - \alpha(\alpha - \beta\gamma) - \gamma(\gamma - \alpha\beta)\right\}$$
$$+ \frac{CC_1}{\delta E D_1}\left\{1 - \gamma^2 - \alpha(\alpha - \beta\gamma) - \beta(\beta - \alpha\gamma)\right\}.$$

Der Inhalt jeder der drei Parenthesen ist derselbe, nämlich

$$1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = \delta^2,$$

die obige Formel wird daher zur folgenden

$$9)\qquad sin\,\omega = \frac{A + BB_1 + CC_1}{ED_1}\,\delta.$$

Als specielle Fälle hiervon ergeben sich die Neigungswinkel der Geraden gegen die Coordinatenebenen; sind nämlich ω_x, ω_y, ω_z die Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebenen yz, xz, xy, so ist im ersten Falle $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, im zweiten $A = 0$,

$B = 1$, $C = 0$ und im dritten $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, man erhält mittelst dieser Specialisirungen

$$10)\quad \begin{cases} \sin\omega_x = \dfrac{\delta}{D_1\sqrt{1-\alpha^2}}, & \sin\omega_y = \dfrac{B_1\delta}{D_1\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \sin\omega_z = \dfrac{C_1\delta}{D_1\sqrt{1-\gamma^2}}. \end{cases}$$

Bei rechtwinkligen Coordinaten ist einfacher

$$11)\quad \sin\omega = \frac{A + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(1+B_1^2+C_1^2)}}$$

$$12)\quad \begin{cases} \sin\omega_x = \dfrac{1}{\sqrt{1+B_1^2+C_1^2}}, \\ \sin\omega_y = \dfrac{B_1}{\sqrt{1+B_1^2+C_1^2}}, \\ \sin\omega_z = \dfrac{C_1}{\sqrt{1+B_1^2+C_1^2}}. \end{cases}$$

§. 21.

Parallele Lage zweier Ebenen.

Aus dem bekannten Satze, dass zwei Ebenen parallel sind, wenn sie auf einer und derselben Geraden senkrecht stehen, folgt augenblicklich, dass Parallelebenen als Ebenen von gleicher Stellung bezeichnet werden können. Sind nun

$$1)\quad Ax + By + Cz = D,$$

$$2)\quad A_1x + B_1y + C_1z = D_1$$

die Gleichungen zweier Ebenen und p, p_1 deren Abstände vom Coordinatenanfang, so wird die Bedingung des Parallelismus dieser Ebenen durch die Gleichungen

$$3)\quad \angle(px) = \angle(p_1x),\quad \angle(py) = \angle(p_1y),\quad \angle(pz) = \angle(p_1z)$$

ausgedrückt, von denen übrigens nur zwei nothwendig sind, weil zwei Stellungswinkel den dritten bestimmen. Zufolge der Formeln 12) in §. 14 ist weiter

$$\cos(px) = \frac{A\delta}{E},\quad \cos(py) = \frac{B\delta}{E},\quad \cos(pz) = \frac{C\delta}{E},$$

$$\cos(p_1x) = \frac{A_1\delta}{E_1},\quad \cos(p_1y) = \frac{B_1\delta}{E_1},\quad \cos(p_1z) = \frac{C_1\delta}{E_1},$$

mithin durch Verbindung mit den Gleichungen 3)

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{E}{E_1};$$

von diesen drei Gleichungen brauchen wir vermöge der vorherigen Bemerkung nur zwei beizubehalten, demnach sind die Bedingungen für die parallele Lage der in Rede stehenden Ebenen

4) $$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

Auch ohne Kenntniss der Stellungswinkel kann man zu diesen Gleichungen gelangen, wenn man sich an den Satz erinnert, dass zwei Ebenen parallel liegen, sobald die gleichnamigen Spuren derselben parallel sind. Zur parallelen Lage der xy-Spuren

$$Ax + By = D \text{ und } A_1 x + B_1 y = D_1$$

gehört nun die Bedingung

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} \text{ oder } \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1},$$

der Parallelismus der xz-Spuren

$$Ax + Cz = D \text{ und } A_1 x + C_1 z = D_1$$

verlangt ferner das Stattfinden der Gleichung

$$\frac{A}{C} = \frac{A_1}{C_1} \text{ oder } \frac{A}{A_1} = \frac{C}{C_1};$$

mit der vorhergehenden Bedingung zusammen giebt dies wieder die in Nr. 4) verzeichneten Gleichungen.

Der Abstand q der beiden Parallelebenen ist $= p - p_1$ oder $= p + p_1$, jenachdem die Ebenen auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten vom Coordinatenanfang liegen; nach Formel 12) in §. 14 erhalten wir

5) $$q = \left(\frac{D}{E} \mp \frac{D_1}{E_1}\right)\delta,$$

wobei die Vorzeichen den beiden erwähnten Lagen entsprechen.

Diese Betrachtungen führen zur Lösung der Aufgabe: durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel einer gegebenen Ebene zu legen. Nennen wir f, g, h die Coordinaten des gegebenen Punktes

$$Ax + By + Cz = D$$

die Gleichung der gegebenen, und

6) $$A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

die der gesuchten Ebene, so muss erstens

$$A_1 f + B_1 g + C_1 h = D_1$$

sein. Wir ziehen diese Gleichung von der vorhergehenden ab und dividiren den Rest durch A_1; das Ergebniss

$$7) \qquad x - f + \frac{B_1}{A_1}(y - g) + \frac{C_1}{A_1}(z - h) = 0$$

ist noch immer die Gleichung der verlangten Ebene mit Einschluss der Bedingung, dass sie durch den Punkt $f g h$ geht. Zur parallelen Lage beider Ebenen gehören weiter die Gleichungen 4), aus denen folgt

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{B}{A} \text{ und } \frac{C_1}{A_1} = \frac{C}{A};$$

nach Substitution dieser Werthe und Multiplication mit A ergiebt sich aus Nr. 7)

$$8) \qquad A(x - f) + B(y - g) + C(z - h) = 0$$

als Gleichung der verlangten Parallelebene. Ihr Abstand von der gegebenen Ebene ist einerlei mit der Entfernung des Punktes $f g h$ von derselben Ebene.

§. 22.

Senkrechte Lage zweier Ebenen.

Lässt man von irgend einem Punkte P_1 einer Ebene $\mathfrak{E}_1$ eine Senkrechte p auf eine andere Ebene $\mathfrak{E}$ herab, so liegt p entweder in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ selbst oder schneidet $\mathfrak{E}$; im ersten Falle sind die beiden Ebenen senkrecht zu einander, im zweiten nicht. Um dieses geometrische Kennzeichen analytisch auszudrücken, bezeichnen wir mit

$$1) \qquad Ax + By + Cz = D$$

die Gleichung der Ebene $\mathfrak{E}$, mit

$$2) \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

die der Ebene $\mathfrak{E}_1$, und mit x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines der letzteren Ebene angehörigen Punktes, für welchen also die Gleichung

$$3) \qquad A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 = D_1$$

besteht. Nach §. 19 Formel 16) sind die Gleichungen einer vom Punkte $x_1 y_1 z_1$ auf die Ebene $\mathfrak{E}$ herabgelassenen Senkrechten

$$y - y_1 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}(x - x_1), \qquad z - z_1 = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}(x - x_1),$$

wobei zur Abkürzung gesetzt war

$$\mathfrak{A} = (1 - \alpha^2) A - (\gamma - \alpha\beta) B - (\beta - \alpha\gamma) C,$$
$$\mathfrak{B} = (1 - \beta^2) B - (\alpha - \beta\gamma) C - (\gamma - \alpha\beta) A,$$
$$\mathfrak{C} = (1 - \gamma^2) C - (\beta - \alpha\gamma) A - (\alpha - \beta\gamma) B;$$

soll nun das erwähnte Perpendikel in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ enthalten sein, so gehören dazu die Bedingungen

$$4)\quad \begin{cases} A_1 + B_1 \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} + C_1 \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = 0, \\ B_1\left(y_1 - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} x_1\right) + C_1\left(z_1 - \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} x_1\right) = D_1. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen ist die zweite überflüssig, weil sie sich aus den Gleichungen 3) und 4) ergiebt, wenn man die letztere mit x_1 multiplicirt und von der ersteren abzieht; zu dem nämlichen Resultate führt auch die geometrische Bemerkung, dass p mit $\mathfrak{E}_1$ bereits den Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ gemein hat, also nur noch parallel mit $\mathfrak{E}_1$ zu sein braucht, um ganz in diese Ebene zu fallen. Als Bedingung für die senkrechte Lage der beiden Ebenen bleibt demnach die eine Gleichung 4) oder

$$5)\qquad \mathfrak{A} A_1 + \mathfrak{B} B_1 + \mathfrak{C} C_1 = 0.$$

Will man die abgekürzten Zeichen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ vermeiden, so ist zu schreiben

$$6)\quad \begin{cases} (1-\alpha^2) A A_1 + (1-\beta^2) B B_1 + (1-\gamma^2) C C_1 \\ -(\alpha-\beta\gamma)(B C_1 + B_1 C) - (\beta-\alpha\gamma)(A C_1 + A_1 C) \\ -(\gamma-\alpha\beta)(A B_1 + A_1 B) \\ = 0. \end{cases}$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem wird $\mathfrak{A} = A$, $\mathfrak{B} = B$, $\mathfrak{C} = C$, mithin

$$7)\qquad A A_1 + B B_1 + C C_1 = 0.$$

Hieran knüpfen sich folgende Aufgaben.

α. Durch zwei gegebene Punkte eine Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen. Nennen wir f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2 die Coordinaten der gegebenen Punkte,

$$Ax + By + Cz = D$$

die Gleichung der gegebenen und

$$8)\qquad Lx + My + Nz = 1$$

die der gesuchten Ebene, so haben wir erstens, weil die Punkte $f_1\, g_1\, h_1$ und $f_2\, g_2\, h_2$ in dieser Ebene liegen sollen,

$$9)\quad \begin{cases} Lf_1 + Mg_1 + Nh_1 = 1, \\ Lf_2 + Mg_2 + Nh_2 = 1, \end{cases}$$

und wegen der senkrechten Lage der beiden Ebenen

$$10)\qquad \mathfrak{A} L + \mathfrak{B} M + \mathfrak{C} N = 0.$$

Die Bestimmung der Unbekannten L, M, N erfordert nun die Auflösung der drei Gleichungen 9) und 10), was weiter keine Schwie-

rigkeit hat. Nach Substitution der für L, M und N gefundenen Werthe kann man die Gleichung 8) auf folgende Form bringen:

$$11)\quad \begin{cases} [\mathfrak{B}(h_1-h_2)-\mathfrak{C}(g_1-g_2)]x+[\mathfrak{C}(f_1-f_2)-\mathfrak{A}(h_1-h_2)]y \\ \qquad\qquad +[\mathfrak{A}(g_1-g_2)-\mathfrak{B}(f_1-f_2)]z \\ =\mathfrak{A}(g_1h_2-g_2h_1)+\mathfrak{B}(h_1f_2-h_2f_1)+\mathfrak{C}(f_1g_2-f_2g_1). \end{cases}$$

Ist das Coordinatensystem rechtwinklig, so hat man nur A, B, C für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu schreiben.

Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden, von welcher alle Punkte beiden Ebenen gleichzeitig angehören; sind also x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes der Durchschnittslinie, so müssen diese den Gleichungen

$$Ax+By+Cz=D$$
$$Fx+Gy+Hz=K$$

zusammen genügen, wobei die zweite Gleichung nur eine abgekürzte Schreibweise der Gleichung 11) sein soll. Die Gleichungen der Projectionen der Durchschnittslinie finden sich, wenn man aus den vorstehenden Gleichungen einmal z und das andere Mal y eliminirt; sie lauten

$$12)\quad \begin{cases} (CF-AH)x+(CG-BH)y=CK-DH, \\ (BF-AG)x+(BH-CG)z=BK-DG. \end{cases}$$

Auch die Richtungswinkel dieser Geraden können leicht mittelst der Formeln 7) in §. 6 vermittelt werden, sobald man den Gleichungen 12) die gewöhnliche Form der Gleichungen einer Geraden ertheilt.

β. Durch eine gegebene Gerade eine Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen. Die Gleichungen der gegebenen Ebene, der Geraden und der gesuchten Ebene mögen der Reihe nach sein

$$Ax+By+Cz=D,$$
$$y=B_1x+b_1, \qquad z=C_1x+c_1,$$
$$Lx+My+Nz=1;$$

da die letztere Ebene die Gerade in sich enthalten soll, so müssen zunächst die Bedingungen

$$13)\quad L+B_1M+C_1N=0, \qquad b_1M+c_1N=1$$

erfüllt sein; hierzu kommt als Bedingungsgleichung für die senkrechte Lage beider Ebenen gegen einander:

$$14)\quad \mathfrak{A}L+\mathfrak{B}M+\mathfrak{C}N=0.$$

Die Gleichungen 13) und 14) bestimmen die Werthe von L, M und

N, nach Substitution derselben ergiebt sich als Gleichung der gesuchten Ebene:

$$15)\quad \begin{cases} (\mathfrak{B}C_1 - \mathfrak{C}B_1)x - (\mathfrak{A}C_1 - \mathfrak{C})y + (\mathfrak{A}B_1 - \mathfrak{B})z \\ \quad = (\mathfrak{A}B_1 - \mathfrak{B})c_1 - (\mathfrak{A}C_1 - \mathfrak{C})b_1; \end{cases}$$

bei rechtwinkligen Coordinaten wird $\mathfrak{A} = A$, $\mathfrak{B} = B$, $\mathfrak{C} = C$.

Den Durchschnitt der neuen Ebene mit der gegebenen Ebene kann man auf gleiche Weise wie bei der vorigen Aufgabe ermitteln; man erhält dann die Gleichungen der rechtwinkligen Projection einer gegebenen Geraden auf eine bestimmte Ebene.

γ. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche einer bestimmten Geraden parallel und senkrecht zu einer vorgeschriebenen Ebene ist. Die Coordinaten des gegebenen Punktes mögen f, g, h heissen, die Gleichungen der Geraden und der Ebene seien

$$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1,$$

$$Ax + By + Cz = D,$$

endlich bezeichne

$$16)\qquad Lx + My + Nz = 1$$

die Gleichung der gesuchten Ebene. Die Bedingung, dass letztere den Punkt fgh enthalten soll, wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$Lf + Mg + Nh = 1;$$

wir ziehen dieselbe von Nr. 16) ab, dividiren mit L und setzen $\frac{M}{L} = P$, $\frac{N}{L} = Q$; es bleibt

$$17)\qquad x - f + P(y - g) + Q(z - h) = 0$$

und dies ist immer noch die Gleichung der verlangten Ebene. Die senkrechte Lage derselben gegen die gegebene Ebene und ihr Parallelismus zur gegebenen Geraden geben die weiteren Gleichungen

$$\mathfrak{A}L + \mathfrak{B}M + \mathfrak{C}N = 0, \qquad L + B_1 M + C_1 N = 0,$$

die wir gleichfalls durch L dividiren. Wir haben jetzt

$$\mathfrak{B}P + \mathfrak{C}Q = -\mathfrak{A}, \qquad B_1 P + C_1 Q = -1,$$

hieraus finden sich P und Q, durch deren Substitution in Nr. 17) die Gleichung der verlangten Ebene zum Vorschein kommt, nämlich

$$18)\quad (\mathfrak{B}C_1 - \mathfrak{C}B_1)(x - f) - (\mathfrak{A}C_1 - \mathfrak{C})(y - g) + (\mathfrak{A}B_1 - \mathfrak{B})(z - h) = 0.$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem gehen, wie bisher, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in A, B, C über.

Der Durchschnitt der neuen mit der gegebenen Ebene kann wie bei den vorigen Aufgaben bestimmt werden.

§. 23.

Ebenen in beliebigen Lagen zu einander.

Zwei beliebige durch die Gleichungen

1) $$Ax + By + Cz = D,$$

2) $$A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

repräsentirte Ebenen haben im Allgemeinen einen geradlinigen Durchschnitt, für dessen Punkte jede der obigen Gleichungen gilt; versteht man demnach unter x, y und z in beiden Gleichungen Dasselbe, so sind letztere die Gleichungen der Durchschnittslinie selber. Die Gleichungen ihrer Projectionen finden sich hieraus, wenn man einmal z, das andere Mal y eliminirt; sie lauten

3) $$\begin{cases} (AC_1 - A_1 C)x + (BC_1 - B_1 C)y = DC_1 - D_1 C, \\ (AB_1 - A_1 B)x + (CB_1 - C_1 B)z = DB_1 - D_1 B. \end{cases}$$

Dasselbe Resultat kann man auch durch die geometrische Bemerkung finden, dass die Spuren der Durchschnittslinie die Durchschnitte von den gleichnamigen Spuren der beiden Ebenen sein müssen.

Was zweitens den Neigungswinkel Θ der beiden Ebenen anbelangt, so ist derselbe einerlei mit dem Winkel zwischen den Senkrechten p und p_1, welche vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Ebenen herabgelassen werden können; bezeichnen wir, wie früher, die Cosinus der Coordinatenwinkel yz, xz, xy mit α, β, γ und die Cosinus der Winkel (px), (py), (pz), $(p_1 x)$, $(p_1 y)$, $(p_1 z)$ der Reihe nach mit ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1, so erhalten wir $\cos\Theta = \cos(pp_1)$ mittelst der Formel 5) in §. 5, nämlich

$$\delta^2 \cos\Theta = (1-\alpha^2)\xi\xi_1 + (1-\beta^2)\eta\eta_1 + (1-\gamma^2)\zeta\zeta_1 - (\alpha-\beta\gamma)(\eta\zeta_1+\eta_1\zeta) - (\beta-\alpha\gamma)(\xi\zeta_1+\xi_1\zeta) - (\gamma-\alpha\beta)(\xi\eta_1+\xi_1\eta),$$

worin δ^2 seine gewöhnliche durch die Formel

$$\delta^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

angegebene Bedeutung hat. In die obige Gleichung haben wir noch die Werthe der sechs Cosinus ξ, η ... ζ_1 zu substituiren, diese sind nach Nr. 12) in §. 14

$$\xi = \frac{A\delta}{E}, \quad \eta = \frac{B\delta}{E}, \quad \zeta = \frac{C\delta}{E},$$

$$\xi_1 = \frac{A_1\delta}{E_1}, \quad \eta_1 = \frac{B_1\delta}{E_1}, \quad \xi_1 = \frac{C_1\delta}{E_1},$$

worin

$$E^2 = (1-\alpha^2)A^2 + (1-\beta^2)B^2 + (1-\gamma^2)C^2$$
$$-2(\alpha-\beta\gamma)BC - 2(\beta-\alpha\gamma)AC - 2(\gamma-\alpha\beta)AB,$$
$$E_1^2 = (1-\alpha^2)A_1^2 + (1-\beta^2)B_1^2 + (1-\gamma^2)C_1^2$$
$$-2(\alpha-\beta\gamma)B_1C_1 - 2(\beta-\alpha\gamma)A_1C_1 - 2(\gamma-\alpha\beta)A_1B_1;$$

bezeichnen wir dabei zur Abkürzung wie folgt

$$F^2 = (1-\alpha^2)AA_1 + (1-\beta^2)BB_1 + (1-\gamma^2)CC_1$$
$$-(\alpha-\beta\gamma)(BC_1+B_1C) - (\beta-\alpha\gamma)(AC_1+A_1C) - (\gamma-\alpha\beta)(AB_1+A_1B),$$

so gelangen wir zu dem Endresultate

$$4) \qquad \cos\Theta = \frac{F^2}{EE_1}.$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem erhält die Formel die einfachere Gestalt

$$5) \qquad \cos\Theta = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}}.$$

Aus Nr. 4) ergeben sich die früheren Formeln für die Cosinus der Neigungswinkel der ersten Ebene gegen die Coordinatenebenen, wenn man die zweite Ebene der Reihe nach mit jeder der Coordinatenebenen zusammenfallen lässt. Als Bedingung für die senkrechte Lage der Ebenen gegen einander erhält man aus Nr. 4) $F^2 = 0$ übereinstimmend mit der Gleichung 6) im vorigen Paragraphen.

Noch wollen wir kurz die verschiedenen gegenseitigen Lagen von drei Ebenen erörtern; letztere mögen kurz $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ heissen und durch die Gleichungen

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z = D_3,$$

gegeben sein. Im Allgemeinen schneidet jede dieser Ebenen die beiden anderen und es bezeichne g_1 den Durchschnitt von $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$, g_2 den von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_3$, endlich g_3 den von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$; die Gleichungen dieser drei Geraden sind

$$\left.\begin{aligned}(A_2C_3 - A_3C_2)x + (B_2C_3 - B_3C_2)y &= D_2C_3 - D_3C_2\\ (A_2B_3 - A_3B_2)x + (C_2B_3 - C_3B_2)z &= D_2B_3 - D_3B_2\end{aligned}\right\}(g_1)$$
$$\left.\begin{aligned}(A_3C_1 - A_1C_3)x + (B_3C_1 - B_1C_3)y &= D_3C_1 - D_1C_3\\ (A_3B_1 - A_1B_3)x + (C_3B_1 - C_1B_3)z &= D_3B_1 - D_1B_3\end{aligned}\right\}(g_2)$$
$$\left.\begin{aligned}(A_1C_2 - A_2C_1)x + (B_1C_2 - B_2C_1)y &= D_1C_2 - D_2C_1\\ (A_1B_2 - A_2B_1)x + (C_1B_2 - C_2B_1)z &= D_1B_2 - D_2B_1\end{aligned}\right\}(g_3)$$

ferner schneiden sich diese drei Geraden, wie die Ebenen selbst, in einem Punkte $x_0y_0z_0$, dessen Coordinaten allen vorhandenen Gleichungen genügen; man findet hieraus:

$$x_0 = \frac{D_1(B_2C_3 - B_3C_2) + D_2(B_3C_1 - B_1C_3) + D_3(B_1C_2 - B_2C_1)}{A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1)},$$

$$y_0 = \frac{D_1(C_2A_3 - C_3A_2) + D_2(C_3A_1 - C_1A_3) + D_3(C_1A_2 - C_2A_1)}{B_1(C_2A_3 - C_3A_2) + B_2(C_3A_1 - C_1A_3) + B_3(C_1A_2 - C_2A_1)},$$

$$z_0 = \frac{D_1(A_2B_3 - A_3B_2) + D_2(A_3B_1 - A_1B_3) + D_3(A_1B_2 - A_2B_1)}{C_1(A_2B_3 - A_3B_2) + C_2(A_3B_1 - A_1B_3) + C_3(A_1B_2 - A_2B_1)}.$$

Die Nenner dieser Brüche sind identisch und nur in drei verschiedenen Formen dargestellt worden, um den symmetrischen Bau der Gleichungen hervortreten zu lassen; zur Abkürzung stellen wir die letzteren Formeln in folgender Weise dar:

$$x_0 = \frac{A_0}{N}, \qquad y_0 = \frac{B_0}{N}, \qquad z_0 = \frac{C_0}{N}.$$

Ausser dem besprochenen allgemeinen Falle können nun folgende vier specielle Fälle vorkommen.

Sind alle drei Ebenen parallel, so hat man

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2 = A_3 : B_3 : C_3$$

folglich

$$\frac{B_2}{B_3} = \frac{C_2}{C_3}, \qquad \frac{B_3}{B_1} = \frac{C_3}{C_1}, \qquad \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

oder

$$B_2C_3 - B_3C_2 = B_3C_1 - B_1C_3 = B_1C_2 - B_2C_1 = 0;$$

in diesem Falle verschwindet der gemeinschaftliche Nenner N und es wird $x_0 = \infty$, $y_0 = \infty$, $z_0 = \infty$.

Sind nur zwei Ebenen parallel, etwa $\mathfrak{E}_1 \parallel \mathfrak{E}_2$, so erhalten die Quotienten

$$\frac{A_2}{A_1}, \qquad \frac{B_2}{B_1}, \qquad \frac{C_2}{C_1}$$

einen gemeinschaftlichen Werth, den wir $\varkappa$ nennen wollen; die Substitution $A_2 = \varkappa A_1$, $B_2 = \varkappa B_1$, $C_2 = \varkappa C_1$ verwandelt die Gleichungen für g_1 in die folgenden

$$(A_1C_3 - A_3C_1)x + (B_1C_3 - B_3C_1)y = \frac{1}{\varkappa} D_2C_3 - D_3C_1,$$

$$(A_1B_3 - A_3B_1)x + (C_1B_3 - C_3B_1)z = \frac{1}{\varkappa} D_2B_3 - D_3B_1;$$

ihr Vergleich mit den für g_2 geltenden Gleichungen zeigt, dass $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ von $\mathfrak{E}_3$ in den parallelen Geraden g_1 und g_2 geschnitten werden. Mittelst derselben Substitution ergiebt sich gleichzeitig $N = 0$, also $x_0 = \infty$, $y_0 = \infty$, $z_0 = \infty$.

Ist nur $N = 0$, ohne dass irgend zwei der drei Ebenen parallel liegen, so finden gleichzeitig die folgenden Beziehungen statt

$$6) \quad \frac{A_2 C_3 - A_3 C_2}{B_2 C_3 - B_3 C_2} = \frac{A_3 C_1 - A_1 C_3}{B_3 C_1 - B_1 C_3} = \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1},$$

$$7) \quad \frac{A_2 B_3 - A_3 B_2}{B_2 C_3 - B_3 C_2} = \frac{A_3 B_1 - A_1 B_3}{B_3 C_1 - B_1 C_3} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1};$$

man erkennt hieraus, dass sich die Ebenen in drei parallelen Geraden schneiden; zugleich ist $x_0 = \infty$, $y_0 = \infty$, $z_0 = \infty$.

Wenn kein Paar der Ebenen parallel liegt, wenn ferner $N = 0$ ist und einer der Zähler A_0, B_0, C_0, etwa A_0 verschwindet, so gelten erstens wieder die Gleichungen 6) und 7); aus der Gleichung $A_0 = 0$ folgt weiter

$$8) \quad \frac{D_2 C_3 - D_3 C_2}{B_2 C_3 - B_3 C_2} = \frac{D_3 C_1 - D_1 C_3}{B_3 C_1 - B_1 C_3} = \frac{D_1 C_2 - D_2 C_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1},$$

und wenn man diese Beziehungen durch die Gleichungen 6) und 7) dividirt

$$\frac{D_2 C_3 - D_3 C_2}{A_2 C_3 - A_3 C_2} = \frac{D_3 C_1 - D_1 C_3}{A_3 C_1 - A_1 C_3} = \frac{D_1 C_2 - D_2 C_1}{A_1 C_2 - A_2 C_1},$$

$$\frac{D_2 C_3 - D_3 C_2}{A_2 B_3 - A_3 B_2} = \frac{D_3 C_1 - D_1 C_3}{A_3 B_1 - A_1 B_3} = \frac{D_1 C_2 - D_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1},$$

d. h. nach gehöriger Reduction $B_0 = 0$ und $C_0 = 0$. Schreibt man endlich statt der ersten Gleichung $A_0 = 0$

$$9) \quad \frac{D_2 B_3 - D_3 B_2}{C_2 B_3 - C_3 B_2} = \frac{D_3 B_1 - D_1 B_3}{C_3 B_1 - C_1 B_3} = \frac{D_1 B_2 - D_2 B_1}{C_1 B_2 - C_2 B_1},$$

so erkennt man aus Nr. 6) und Nr. 8) die Identität der xy-Projectionen von g_1, g_2, g_3, sowie aus Nr. 7) und Nr. 9) die Identität der xz-Projectionen dieser Geraden. Hieraus zusammen folgt, dass sich für $N = 0$ und $A_0 = 0$ die drei Ebenen in einer und derselben Geraden schneiden; zugleich erhalten x_0, y_0, z_0 den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$, welcher sich im vorliegenden Falle durch die Bemerkung erklärt, dass jeder beliebige Punkt der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der Ebenen als ein Durchschnittspunkt der letzteren gelten kann.

Viertes Capitel.

Transformation der Coordinaten.

---

§. 24.

Die allgemeinen Fundamentalformeln.

Wenn drei in einem Punkte zusammentreffende Ebenen auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogen, also ihrer Lage nach gegeben sind, so können dieselben auch als neue Coordinatenebenen genommen werden und es entsteht dann die Frage nach den neuen Coordinaten, welche irgend ein Punkt im Raume bei seiner Beziehung auf das zweite Coordinatensystem erhält. Die primitiven Coordinaten des Punktes P mögen x, y, z, die secundären Coordinaten desselben x', y', z' heissen, ferner nennen wir a, b, c die auf das ursprüngliche System bezogenen Coordinaten des neuen Coordinatenanfanges, endlich p_x, p_y, p_z die auf den Ebenen yz, xz, xy errichteten Normalen, durch deren Richtungen sich die Stellungen der entsprechenden Ebenen bestimmen.

I. Am einfachsten gestaltet sich die Coordinatenverwandlung in dem Falle, wo die neuen Ebenen parallel zu den ursprünglichen liegen, also auch die gleichnamigen Achsen beider Systeme parallel sind; wir nehmen dann die positiven x' in demselben Sinne (d. h. nach derselben Gegend des Raumes hin), wie die positiven x, ebenso $+ y'$ im Sinne von $+ y$ und $+ z'$ im Sinne von $+ z$. Hieraus folgt unmittelbar, dass beide Coordinatensysteme zur Congruenz gebracht werden können, wenn man die yz-Ebene in der Richtung der positiven x parallel mit sich selbst um a verschiebt und wenn man gleichzeitig mit der xz-Ebene eine ähnliche Verschiebung um b, sowie mit der xy-Ebene eine Verschiebung um c vornimmt. Demgemäss hat man die Gleichungen

$$1) \qquad x = a + x', \qquad y = b + y', \qquad z = c + z',$$

welche ganz allgemein giltig sind, wenn man immer die möglichen verschiedenen Zeichen der darin vorkommenden Coordinaten berücksichtigt.

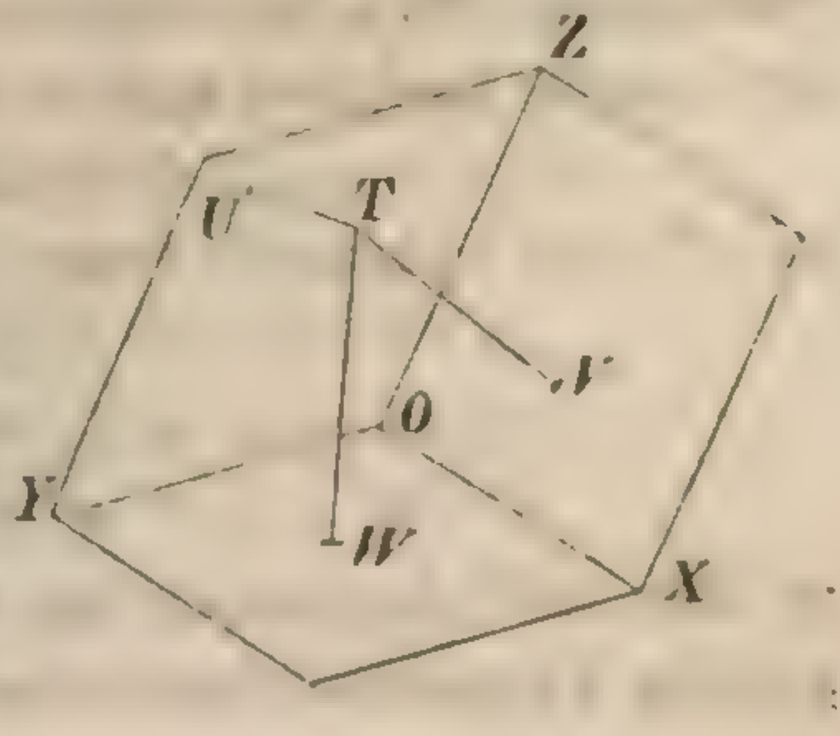
II. Wir betrachten zweitens den Fall, wo beide Coordinatensysteme einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt besitzen, ohne dass aber irgend eine der neuen Coordinatenachsen mit einer des primitiven Systemes zusammenfällt. Wo nun auch der Punkt $x\,y\,z$ oder $x'\,y'\,z'$ liegen möge, so ist doch sein Radiusvector r immer derselbe, gleichgiltig, ob man ihn auf das eine oder andere Coordinatensystem bezieht; eben desswegen ist auch die rechtwinklige Projection von r auf irgend eine Gerade s in beiden Fällen die nämliche, was wir durch die (wegen $r = r'$) identische Gleichung $r\,cos\,(r\,s) = r'\,cos\,(r's)$ ausdrücken können. Projiciren wir statt r die aus x, y, z bestehende gebrochene Linie, ebenso statt r' die aus x', y', z' zusammengesetzte gebrochene Linie, so verwandelt sich die vorige Gleichung in die nachstehende:

$$2)\quad \left\{ \begin{array}{r} x\,cos\,(x\,s) + y\,cos\,(y\,s) + z\,cos\,(z\,s) \\ = x'\,cos\,(x's) + y'\,cos\,(y's) + z'\,cos\,(z's), \end{array} \right.$$

welche als die Quelle aller folgenden Formeln zu betrachten ist.

Zunächst wollen wir die beliebige Gerade s der Reihe nach mit den auf den Ebenen $y\,z$, $x\,z$, $x\,y$ errichteten Senkrechten p_x, p_y, p_z zusammenfallen lassen. Dabei unterscheiden wir an diesen Normalen eine positive und negative Seite; die positive Seite von p_x soll nämlich diejenige sein, welche nach der positiven Seite der x gerichtet ist, in gleicher Weise nehmen wir die positiven Seiten von p_y und p_z im Sinne der positiven y resp. z. Dies lässt sich auch so ausdrücken: wenn man von einem Punkte T, dessen drei primitive Coordinaten positiv sind, welcher also innerhalb des von den positiven Theilen der Coordinatenebenen gebildeten Körperwinkel liegt, Senkrechte TU, TV, TW auf die Coordinatenebenen herablässt, so ist $p_x = UT$ positiv in der Richtung von U nach T, und dem entsprechend $p_y = VT$, $p_z = WT$. Ferner soll im Folgenden der Winkel zwischen zwei Geraden immer als der Winkel zwischen deren positiven Theilen verstanden und von 0^0 bis 180^0 gezählt werden. Hiernach ist

Fig. 15.



$$\text{für } s = p_x, \quad \angle(ys) = \angle(zs) = 90^0,$$
$$\text{„ } s = p_y, \quad \angle(xs) = \angle(zs) = 90^0,$$
$$\text{„ } s = p_z, \quad \angle(xs) = \angle(ys) = 90^0,$$

und aus der Gleichung 2) fliessen jetzt die folgenden Relationen

$$3) \begin{cases} x\cos(xp_x) = x'\cos(x'p_x) + y'\cos(y'p_x) + z'\cos(z'p_x), \\ y\cos(yp_y) = x'\cos(x'p_y) + y'\cos(y'p_y) + z'\cos(z'p_y), \\ z\cos(zp_z) = x'\cos(x'p_z) + y'\cos(y'p_z) + z'\cos(z'p_z). \end{cases}$$

Für den Gebrauch dieser Transformationsformeln ist nur zu merken, dass erstens die linker Hand vorkommenden Winkel (xp_x), (yp_y), (zp_z) als bekannt anzusehen sind, weil sie aus den bekannten Coordinatenwinkeln (xy), (xz), (yz) abgeleitet werden können (§. 14, Nr. 13, 14, 15), und dass zweitens die rechter Hand vorkommenden neun Winkel gegeben sein müssen, weil durch sie die Lage der neuen Coordinatenachsen gegen die Normalen p_x, p_y, p_z festgestellt wird. Uebrigens bestehen zwischen den genannten neun Winkeln noch drei Gleichungen, nämlich die drei Relationen, welche überhaupt für je drei Richtungswinkel gelten (§. 4, Nr. 7).

Will man die Anwendung der Normalen p_x, p_y, p_z vermeiden und unmittelbar die Winkel zwischen den secundären und primitiven Achsen in Rechnung bringen, so braucht man die willkürliche Gerade s nur der Reihe nach mit den ursprünglichen Achsen der x, y und z zusammenfallen zu lassen. Die Gleichung 2) liefert dann die folgenden Beziehungen

$$x + y\cos(yx) + z\cos(zx) = x'\cos(x'x) + y'\cos(y'x) + z'\cos(z'x),$$
$$x\cos(xy) + y + z\cos(zy) = x'\cos(x'y) + y'\cos(y'y) + z'\cos(z'y),$$
$$x\cos(xz) + y\cos(yz) + z = x'\cos(x'z) + y'\cos(y'z) + z'\cos(z'z);$$

bezeichnen wir, wie früher, die Cosinus der Coordinatenwinkel (yz), (xz), (xy) mit α, β, γ, den Ausdruck

$$1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

mit δ^2, und setzen wir ferner abkürzend

$$x'\cos(x'x) + y'\cos(y'x) + z'\cos(z'x) = X,$$
$$x'\cos(x'y) + y'\cos(y'y) + z'\cos(z'y) = Y,$$
$$x'\cos(x'z) + y'\cos(y'z) + z'\cos(z'z) = Z,$$

so führt die Auflösung der vorigen drei Gleichungen zu den folgenden Transformationsformeln:

$$4)\quad \begin{cases} x = \dfrac{(1-\alpha^2)\,X - (\gamma-\alpha\beta)\,Y - (\beta-\alpha\gamma)\,Z}{\delta^2}, \\ y = \dfrac{(1-\beta^2)\,Y - (\alpha-\beta\gamma)\,Z - (\gamma-\alpha\beta)\,X}{\delta^2}, \\ z = \dfrac{(1-\gamma^2)\,Z - (\beta-\alpha\gamma)\,X - (\alpha-\beta\gamma)\,Y}{\delta^2}. \end{cases}$$

Von den hierin vorkommenden zwölf Winkeln sind zunächst (xy), (xz) und (yz) unmittelbar bekannt; jede der drei Gruppen

$$\begin{array}{lll} (x'x), & (x'y), & (x'z), \\ (y'x), & (y'y), & (z'z), \\ (z'x), & (z'y), & (z'z), \end{array}$$

enthält die Richtungswinkel einer secundären Achse gegen die primitiven Achsen, zwischen den Winkeln einer Gruppe besteht also jedesmal die überhaupt für drei Richtungswinkel geltende Gleichung, und demnach dürfen aus jeder Gruppe nur zwei Winkel gegeben werden.

III. Wenn das neue Coordinatensystem dem ursprünglichen weder parallel liegt, noch denselben Anfangspunkt besitzt, so kann man sich durch den Coordinatenanfang O' des secundären Systemes ein drittes System gelegt denken, dessen Achsen den primitiven Coordinatenachsen in gleichem Sinne parallel sind. Die Coordinaten des Punktes xyz in Beziehung auf dieses intermediäre System mögen x_0, y_0, z_0 heissen; es ist dann

$$5)\qquad x = a + x_0, \quad y = b + y_0, \quad z = c + z_0;$$

das intermediäre System der $x_0y_0z_0$ hat ferner mit dem System der $x'y'z'$ den Coordinatenanfang gemein und daher sind auf dieses die Formeln 3) oder 4) anwendbar, indem man x_0, y_0, z_0 für x, y, z schreibt. Weil ferner $x_0 /\!/ x$, $y_0 /\!/ y$, $z_0 /\!/ z$, so stimmen die Winkel $(x'x_0)$, $(x'y_0)$ etc. mit den Winkeln $(x'x)$, $(x'y)$ etc. überein und es bedarf daher überall, wo Winkel vorkommen, nicht mehr der Indices. Nach Ermittelung von x_0, y_0, z_0 geben nun die Formeln 5) x, y, z ausgedrückt durch x', y', z'; also erstens, wenn man die Richtungen der neuen Achsen durch die Winkel zwischen ihnen und den Normalen der ursprünglichen Coordinatenebenen fixirt:

$$6)\quad \begin{cases} x = a + \dfrac{x'\cos(x'p_x) + y'\cos(y'p_x) + z'\cos(z'p_x)}{\cos(xp_x)}, \\ y = b + \dfrac{x'\cos(x'p_y) + y'\cos(y'p_y) + z'\cos(z'p_y)}{\cos(yp_y)}, \\ z = c + \dfrac{x'\cos(x'p_z) + y'\cos(y'p_z) + z'\cos(z'p_z)}{\cos(zp_z)}; \end{cases}$$

zweitens, wenn man die Winkel zwischen den secundären und primären Achsen in Rechnung bringt und die bereits in II. erwähnten Abkürzungen benutzt:

$$7)\quad \begin{cases} x = a + \dfrac{(1-\alpha^2)X - (\gamma - \alpha\beta)Y - (\beta - \alpha\gamma)Z}{\delta^2}, \\ y = b + \dfrac{(1-\beta^2)Y - (\alpha - \beta\gamma)Z - (\gamma - \alpha\beta)X}{\delta^2}, \\ z = c + \dfrac{(1-\gamma^2)Z - (\beta - \alpha\gamma)X - (\alpha - \beta\gamma)Y}{\delta^2}. \end{cases}$$

Diese ganz allgemeinen Formeln können auf ähnliche Weise angewendet werden, wie die entsprechenden specielleren Formeln der analytischen Geometrie der Ebene; hat man nämlich zwischen den drei Coordinaten x, y, z eines Punktes eine oder zwei Gleichungen, wodurch entweder eine Fläche oder eine Linie charakterisirt wird, so führt die Substitution der für x, y, z angegebenen Werthe zu eben so viel neuen Gleichungen zwischen x', y', z', d. h. zu den Gleichungen der nämlichen Gebilde, bezogen auf das neue Coordinatensystem. Nicht überflüssig ist hierbei die Bemerkung, dass die Werthe von x, y, z nur die ersten Potenzen von x', y', z' und keine Produkte von zweien oder dreien dieser Grössen enthalten; in Folge dieses Umstandes ist jede resultirende Gleichung zwischen x', y', z' immer von demselben Grade wie die ursprüngliche Gleichung zwischen x, y und z.

§. 25.

Transformation rechtwinkliger Systeme.

Die überaus häufige und meistens bequeme Anwendung des rechtwinkligen Coordinatensystems erheischt noch eine nähere Untersuchung des speciellen Falles, wo die Systeme xyz und $x'y'z'$ rechtwinklig sind und einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt besitzen. Es ist dann $a = b = c = 0$, $\angle(xy) = \angle(xz) = \angle(yz) = 90^0$, und überhaupt für jede beliebige Gerade s

$$\angle(sp_x) = \angle(sx), \quad \angle(sp_y) = \angle(sy), \quad \angle(sp_z) = \angle(sz);$$

die Formeln 6) und 7) des vorigen Paragraphen geben jetzt übereinstimmend

$$1)\quad \begin{cases} x = x'\cos(x'x) + y'\cos(y'x) + z'\cos(z'x), \\ y = x'\cos(x'y) + y'\cos(y'y) + z'\cos(z'y), \\ z = x'\cos(x'z) + y'\cos(y'z) + z'\cos(z'z). \end{cases}$$

Zwischen den Cosinus der neun vorkommenden Winkel finden

folgende Beziehungen statt; erstens hat man für die drei Richtungswinkel von jeder der neuen Achsen

$$2)\quad \begin{cases} \cos^2(x'x) + \cos^2(x'y) + \cos^2(x'z) = 1, \\ \cos^2(y'x) + \cos^2(y'y) + \cos^2(y'z) = 1, \\ \cos^2(z'x) + \cos^2(z'y) + \cos^2(z'z) = 1; \end{cases}$$

weil ferner die neuen Coordinatenwinkel $(x'y')$, $(x'z')$ und $(y'z')$ rechte Winkel sein sollen, so ist nach Formel 9) in §. 5

$$3)\quad \begin{cases} \cos(x'x)\cos(y'x) + \cos(x'y)\cos(y'y) + \cos(x'z)\cos(y'z) = 0, \\ \cos(x'x)\cos(z'x) + \cos(x'y)\cos(z'y) + \cos(x'z)\cos(z'z) = 0, \\ \cos(y'x)\cos(z'x) + \cos(y'y)\cos(z'y) + \cos(y'z)\cos(z'z) = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt kann man auch von dem Systeme $x'y'z'$ zu dem Systeme xyz übergehen, indem man jenes als das primitive und dieses als das secundäre betrachtet; hierzu bedarf es keiner neuen Rechnung, sondern nur einer gegenseitigen Vertauschung von x mit x', y mit y' und z mit z'; die resultirenden Formeln sind:

$$4)\quad \begin{cases} x' = x\cos(xx') + y\cos(yx') + z\cos(zx'), \\ y' = x\cos(xy') + y\cos(yy') + z\cos(zy'), \\ z' = x\cos(xz') + y\cos(yz') + z\cos(zz'); \end{cases}$$

und zwar gelten für die Richtungswinkel der Achsen von x, y, z gegen die Achsen x', y', z' die Gleichungen

$$5)\quad \begin{cases} \cos^2(xx') + \cos^2(xy') + \cos^2(xz') = 1, \\ \cos^2(yx') + \cos^2(yy') + \cos^2(yz') = 1, \\ \cos^2(zx') + \cos^2(zy') + \cos^2(zz') = 1, \end{cases}$$

endlich, weil die Winkel (xy), (xz) und (yz) rechte Winkel sind,

$$6)\quad \begin{cases} \cos(xx')\cos(yx') + \cos(xy')\cos(yy') + \cos(xz')\cos(yz') = 0, \\ \cos(xx')\cos(zx') + \cos(xy')\cos(zy') + \cos(xz')\cos(zz') = 0, \\ \cos(yx')\cos(zx') + \cos(yy')\cos(zy') + \cos(yz')\cos(zz') = 0. \end{cases}$$

Um kurz sein zu können, bezeichnen wir die Cosinus der Richtungswinkel von x' gegen die Achsen der x, y, z der Reihe nach mit α, α', α'', und dem entsprechend die Cosinus der Richtungswinkel von y' und z' mit β, β', β'' und γ, γ', γ''; die bisherigen Gleichungen lauten dann:

$$7)\quad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z = \alpha'' x' + \beta'' x' + \gamma'' z'; \end{cases}$$

$$8)\quad \left\{\begin{array}{ll} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, & \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1; & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0; \end{array}\right\} \quad 9)$$

und umgekehrt

$$10)\quad \begin{cases} x' = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \\ y' = \beta x + \beta' y + \beta'' z, \\ z' = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z; \end{cases}$$

$$11)\quad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, & \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, & \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1; & \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0. \end{cases} \quad 12)$$

An dieses Formelnsystem knüpfen sich drei wesentliche Bemerkungen.

a. Durch die Gleichungen 8) und 9) ist ausgesprochen, dass die beiden Coordinatensysteme rechtwinklig sind; das Nämliche liegt in den Gleichungen 11) und 12) ausgedrückt, mithin müssen diese sich aus jenen herleiten lassen. Es ist nichts weniger als überflüssig, dies direct nachzuweisen, weil man dabei noch einige andere brauchbare Relationen gewinnt.

Aus den beiden ersten Gleichungen in Nr. 9) findet man durch Entwickelung von α' und α''

$$\alpha' = \frac{\beta''\gamma - \beta\gamma''}{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}\alpha, \qquad \alpha'' = \frac{\beta\gamma' - \beta'\gamma}{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}\alpha,$$

und durch Substitution in die erste der Gleichungen 8)

$$\{(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2 + (\beta''\gamma - \beta\gamma'')^2 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2\}\,\alpha^2 = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2.$$

Die linke Seite der vorstehenden Gleichung ist identisch mit der Differenz

$$(\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2)(\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2) - (\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'')^2,$$

deren Betrag, zufolge der übrigen Gleichungen in Nr. 8), die Einheit ausmacht; die vorige Gleichung vereinfacht sich demnach zu

$$\alpha^2 = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2,$$

und daraus folgen nach dem Obigen die analogen Gleichungen

$$\alpha'^2 = (\beta''\gamma - \beta\gamma'')^2, \qquad \alpha''^2 = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2.$$

Aehnliche Beziehungen sind leicht für β, β', β'' und γ, γ', γ'' zu erhalten, überhaupt ergiebt sich folgendes System von neuen Gleichungen:

$$13)\quad \begin{cases} \alpha = \pm(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'), & \beta = \pm(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha'), & \gamma = \pm(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'), \\ \alpha' = \pm(\beta''\gamma - \beta\gamma''), & \beta' = \pm(\gamma''\alpha - \gamma\alpha''), & \gamma' = \pm(\alpha''\beta - \alpha\beta''), \\ \alpha'' = \pm(\beta\gamma' - \beta'\gamma), & \beta'' = \pm(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha), & \gamma'' = \pm(\alpha\beta' - \alpha'\beta). \end{cases}$$

Aus der ersten und zweiten der Gleichungen 8) ziehen wir ferner

$$(\alpha'^2 + \alpha''^2)(\beta'^2 + \beta''^2) = (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)$$

oder

$$\alpha'^2\beta'^2 + \alpha'^2\beta''^2 + \alpha''^2\beta'^2 + \alpha''^2\beta''^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2\beta^2 = 1;$$

substituirt man für $\alpha^2\beta^2$ seinen der ersten Gleichung in Nr. 9) entnommenen Werth, nämlich

$$\alpha'^2\beta''^2 + 2\alpha'\alpha''\beta'\beta'' + \alpha''^2 + \beta''^2,$$

so wird aus der vorigen Gleichung

$$\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')^2 = 1$$

d. i. unter Rücksicht auf die dritte Gleichung in Nr. 13)

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Auf ähnliche Weise, wie hier die erste Gleichung in Nr. 11) abgeleitet wurde, lassen sich die übrigen Gleichungen derselben Gruppe beweisen.

Setzen wir in der soeben entwickelten Formel für α, β, γ ihre nach Nr. 13) bestimmten Werthe, so erhalten wir

$$(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2 + (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')^2 + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')^2 = 1;$$

die linke Seite ist identisch mit

$$(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) - (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2$$

oder vermöge der schon bewiesenen zweiten und dritten Gleichung in Nr. 11) einerlei mit

$$1 - (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2;$$

nach Substitution dieses Ausdruckes geht die letzte Gleichung in die dritte Gleichung der Gruppe 12) über; auf analoge Weise ergeben sich die übrigen Gleichungen derselben Gruppe.

b. Eine zweite Bemerkung bezieht sich auf die Frage, ob die Achsen in beiden rechtwinkligen Coordinatensystemen in derselben Ordnung auf einander folgen oder nicht. Denken wir uns nämlich das secundäre System so weit herumgewendet, dass die positive Seite der x-Achse mit der positiven Seite der x'-Achse zusammenfällt, so können wir durch Drehung des secundären Systemes um die x'-Achse auch den positiven Theil der y'-Achse mit dem positiven Theile der y-Achse zur Coïncidenz bringen, und gleichzeitig muss nun die z'-Achse in die z-Achse zu liegen kommen. Dabei sind aber zwei Fälle zu unterscheiden; nämlich entweder fällt die positive Seite der z'-Achse mit der positiven Seite der z-Achse zusammen, oder umgekehrt ist es die negative Seite der z'-Achse, welche auf die positive Seite der z-Achse zu liegen kommt. Im ersten Falle lassen sich beide Systeme zur Congruenz bringen und mögen homologe Coordinatensysteme heissen, im zweiten Falle können sie nur als symmetrisch-gleiche betrachtet werden, was durch die Bezeichnung symmetrische Coordinatensysteme ausgedrückt werden soll.

Die Formeln 7), 8), 9) beziehen sich, wie aus ihrer Herleitung unmittelbar erhellt, auf beide Arten von Coordinatensystemen, dasselbe gilt von den abgeleiteten Gleichungen 13), letztere enthalten aber das Mittel zur analytischen Sonderung der genannten Fälle, und zwar sind es die doppelten Vorzeichen, wodurch die Unterscheidung herbeigeführt wird. Setzen wir

$$\alpha = \cos 0^0 = 1, \qquad \alpha' = \alpha'' = \cos 90^0 = 0,$$

so fällt x' mit x zusammen, d. h. es wird

$$x' = x;$$

nehmen wir gleichzeitig

$$\beta = 0, \qquad \beta' = 1, \qquad \beta'' = 0,$$

so wird

$$y' = y;$$

bei zwei homologen Systemen muss nun z' mit z zusammenfallen, also

$$\gamma = 0, \qquad \gamma' = 0, \qquad \gamma'' = +1,$$
$$z' = z$$

werden, bei zwei symmetrischen Systemen dagegen würde sich

$$\gamma = 0, \qquad \gamma' = 0, \qquad \gamma'' = -1,$$
$$z' = -z$$

ergeben müssen. In der That liefert die letzte Gleichung in Nr. 13) vermöge der für $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ angenommenen Specialwerthe $\gamma'' = \pm 1$, und der Vergleich mit dem Vorigen lehrt nun, dass das obere Zeichen für homologe, das untere für symmetrische Coordinatensysteme gilt. Durch die nämlichen Substitutionen überzeugt man sich leicht, dass in den Gleichungen 13) überhaupt immer die positiven Vorzeichen den homologen und die negativen den symmetrischen Coordinatensystemen entsprechen.

c. Da zwischen den neun Cosinus $\alpha, \alpha', \ldots . \gamma''$ sechs Gleichungen bestehen, so dürfen nicht mehr als drei derselben willkürlich angenommen werden und zwar nur solche, die nicht gleichzeitig in einer der sechs Gleichungen 8) oder 11) vorkommen. Drei derartige Grössen sind z. B. α, β', γ''; die Bestimmung der übrigen sechs Grössen geschieht dann auf folgende Weise.

Von der Summe der ersten und zweiten Gleichung in Nr. 8) subtrahiren wir die dritte Gleichung in Nr. 11), ebenso von der Summe der ersten und dritten Gleichung in Nr. 8) die zweite Gleichung in 10), endlich von der Summe der zweiten und dritten

Gleichung in 8) die erste Gleichung in 10); wir erhalten so die Relationen

$$14)\quad \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\alpha'^2+\beta'^2 = 1+\gamma''^2, \\ \alpha^2+\gamma^2+\alpha''^2+\gamma''^2 = 1+\beta'^2, \\ \beta'^2+\gamma'^2+\beta''^2+\gamma''^2 = 1+\alpha^2, \end{cases}$$

in denen rechter Hand nur bekannte Grössen vorkommen. Nach Nr. 13) haben wir ferner für homologe Systeme:

$$15)\quad \alpha\beta'-\alpha'\beta=\gamma'', \quad \gamma''\alpha-\gamma\alpha''=\beta', \quad \beta'\gamma''-\beta''\gamma'=\alpha,$$

dagegen für symmetrische Systeme:

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta=-\gamma'', \quad \gamma''\alpha-\gamma\alpha''=-\beta', \quad \beta'\gamma''-\beta''\gamma'=-\alpha,$$

so dass es nur einer Aenderung der Vorzeichen von α, β', γ'' bedarf, um zwei homologe durch zwei symmetrische Systeme zu ersetzen. Subtrahiren und addiren wir das Doppelte der Gleichungen 15) zu den Gleichungen 14), so finden wir

$$\begin{aligned} (\alpha-\beta')^2+(\beta+\alpha')^2 &= (1-\gamma'')^2, \\ (\alpha+\beta')^2+(\beta-\alpha')^2 &= (1+\gamma'')^2; \\ (\alpha-\gamma'')^2+(\alpha''+\gamma)^2 &= (1-\beta')^2, \\ (\alpha+\gamma'')^2+(\alpha''-\gamma)^2 &= (1+\beta')^2; \\ (\beta'-\gamma'')^2+(\gamma'+\beta'')^2 &= (1-\alpha)^2, \\ (\beta'+\gamma'')^2+(\gamma'-\beta'')^2 &= (1+\beta)^2; \end{aligned}$$

die linker Hand zuerst stehenden Ausdrücke sind bekannt, die vorigen Gleichungen führen daher zu den folgenden

$$\begin{aligned} \beta+\alpha' &= \sqrt{(1-\gamma'')^2-(\alpha-\beta')^2}, \\ \beta-\alpha' &= \sqrt{(1+\gamma'')^2-(\alpha+\beta')^2}; \\ \alpha''+\gamma &= \sqrt{(1-\beta')^2-(\alpha-\gamma'')^2}, \\ \alpha''-\gamma &= \sqrt{(1+\beta')^2-(\alpha+\gamma'')^2}; \\ \gamma'+\beta'' &= \sqrt{(1-\alpha)^2-(\beta'-\gamma'')^2}, \\ \gamma'-\beta'' &= \sqrt{(1+\alpha)^2-(\beta'+\gamma'')^2}. \end{aligned}$$

Man übersieht auf der Stelle, wie sich hieraus die sechs Unbekannten $\beta, \alpha', \alpha'', \gamma, \gamma', \beta''$ durch Addition und Subtraction ableiten lassen; vorher wollen wir aber bemerken, dass die unter den Wurzelzeichen stehenden Quadratdifferenzen in Producte zerlegbar sind; setzen wir nämlich zur Abkürzung

$$16)\quad \begin{cases} 1+\alpha-\beta'-\gamma'' = A, \\ 1-\alpha+\beta'-\gamma'' = B, \\ 1-\alpha-\beta'+\gamma'' = C, \\ 1+\alpha+\beta'+\gamma'' = D, \end{cases}$$

so lauten die obigen Gleichungen

$$\beta + \alpha' = \sqrt{AB}, \quad \alpha'' + \gamma = \sqrt{AC}, \quad \gamma' + \beta'' = \sqrt{BC},$$
$$\beta - \alpha' = \sqrt{CD}, \quad \alpha'' - \gamma = \sqrt{BD}, \quad \gamma' - \beta'' = \sqrt{AD}.$$

Die Werthe der Unbekannten sind hiernach für homologe Systeme:

$$17) \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{AB} + \sqrt{CD}\right), & \gamma = \frac{1}{2}\left(\sqrt{AC} - \sqrt{BD}\right), \\ \alpha' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{BA} - \sqrt{CD}\right), & \gamma' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{BC} + \sqrt{AD}\right), \\ \alpha'' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{CA} + \sqrt{BD}\right), & \beta'' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{CB} - \sqrt{AD}\right). \end{cases}$$

Nach der früheren Bemerkung führt die Aenderung der Vorzeichen von α, β', γ'' zu den entsprechenden Formeln für symmetrische Systeme. Setzen wir demgemäss zur Abkürzung:

$$18) \begin{cases} 1 - \alpha + \beta' + \gamma'' = A_1, \\ 1 + \alpha - \beta' + \gamma'' = B_1, \\ 1 + \alpha + \beta' - \gamma'' = C_1, \\ 1 - \alpha - \beta' - \gamma'' = D_1, \end{cases}$$

so gelten für symmetrische Coordinatensysteme die Formeln:

$$19) \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A_1 B_1} + \sqrt{C_1 D_1}\right), & \gamma = \frac{1}{2}\left(\sqrt{A_1 C_1} - \sqrt{B_1 D_1}\right), \\ \alpha' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{B_1 A_1} - \sqrt{C_1 D_1}\right), & \gamma' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{B_1 C_1} + \sqrt{A_1 D_1}\right), \\ \alpha'' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{C_1 A_1} + \sqrt{B_1 D_1}\right), & \beta'' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{C_1 B_1} - \sqrt{A_1 D_1}\right). \end{cases}$$

Hinsichtlich der Realität der sechs Grössen $\beta, \gamma, \alpha', \gamma', \alpha'', \beta''$ bemerken wir noch Folgendes. In den Gleichungen 18) kommen alle Combinationen zu je zweien aus A, B, C, D vor; besitzen nun irgend zwei dieser Grössen entgegengesetzte Vorzeichen, so wird eine der Unbekannten $\beta, \gamma, \alpha', \gamma', \alpha'', \beta''$ imaginär, mithin das betreffende Coordinatensystem unmöglich. Zur Realität der verlangten Transformation gehört also, dass die Grössen A, B, C, D dasselbe Vorzeichen haben, und zwar kann dieses nur das positive Zeichen sein, weil $A + B + C + D = +4$ ist; dabei bleibt aber die Möglichkeit, dass die eine oder andere der genannten Grössen verschwindet. Die Bedingung für die Realität der ersten Transformation besteht also darin, dass keine der Grössen A, B, C, D negativ ist. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die zweite Transformation mittelst der in 18) und 19) angegebenen Werthe.

§. 26.

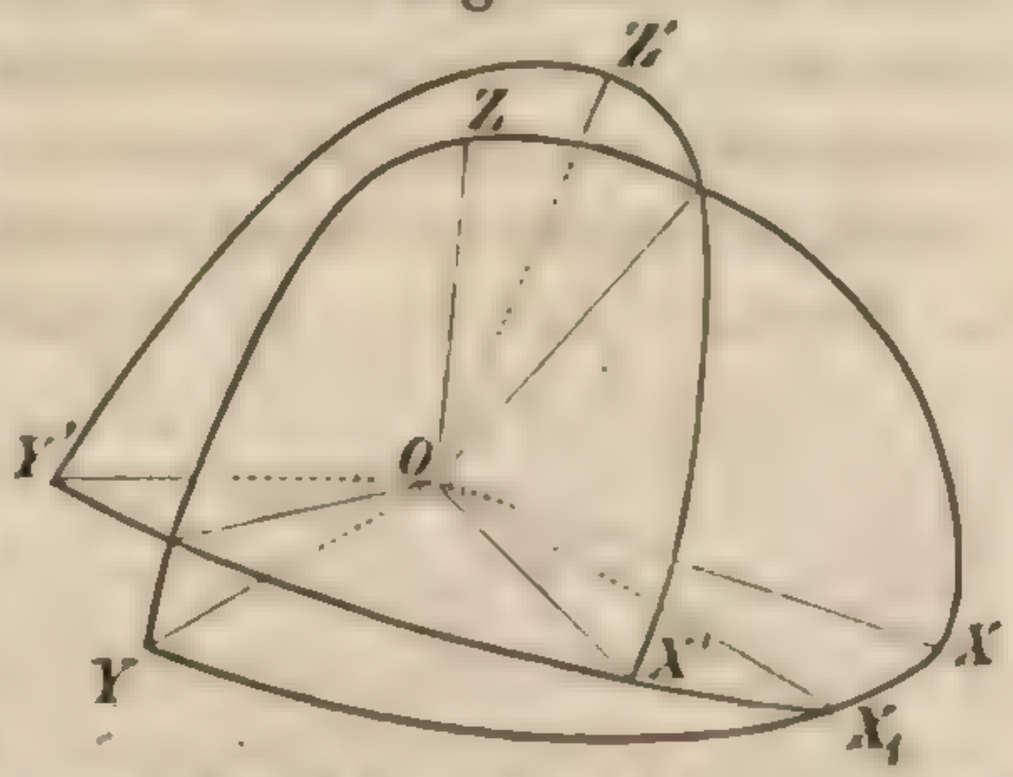
Anderes Verfahren zur Transformation rechtwinkliger Systeme.

Die Coordinatenverwandlung nach den im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln hat in manchen Fällen, bei denen es

nicht auf eine sehr symmetrische Rechnung ankommt, die Unbequemlichkeit, dass ausser den gegebenen drei Grössen (α, β', γ'') noch zehn andere (A, B, C, D, β, γ, α', γ', α'', β'') im Auge behalten werden müssen, und es ist daher nicht überflüssig, ein anderes Formelnsystem kennen zu lernen, worin ausser den primitiven und secundären Coordinaten nur noch drei Winkel vorkommen, welche die Lage des neuen Coordinatensystems gegen das ursprüngliche feststellen.

Die Ebene $x'y'$ schneidet die Ebene xy in einer Geraden, die wir OX_1 nennen wollen und deren Lage durch den Winkel XOX_1 bestimmt wird, den sie mit der positiven Seite der x-Achse einschliesst. Wir bezeichnen diesen Winkel mit ψ und zählen denselben, von OX ausgehend, im Sinne derjenigen (directen) Drehung, mittelst welcher die positive Seite der x-Achse durch 90° hindurch in die positive Seite der y-Achse übergeführt werden kann. Ferner sei ϑ der Neigungswinkel der $x'y'$-Ebene gegen die xy-Ebene; er möge in demselben Sinne genommen werden, wie eine Drehung von der positiven Seite der y-Achse nach der positiven Seite der z-Achse, so dass also in dem Falle, wo OX_1 mit OX identisch wäre, die Drehung um ϑ bis zur Coïncidenz der Ebene xy mit der Ebene $x'y'$ in gleicher Richtung mit der Drehung geschehen würde, welche OY in OZ überführt. Endlich bezeichne φ den Winkel zwischen OX_1 und der positiven Seite der x'-Achse; die Drehungsrichtung von φ sei dieselbe, wie von ψ, so dass also in dem Falle $\vartheta = 0$ der Winkel φ als Fortsetzung von ψ erscheinen würde ($\angle XOX' = \psi + \varphi$ für $\vartheta = 0$). Durch die Winkel ψ, ϑ, φ ist die Lage der positiven Seite OX' der x'-Achse bestimmt; die positive Seite OY' der y'-Achse liege von OX' aus nach derselben Gegend des Raumes hin, wie OY von OX aus gerechnet. Was endlich die Achse der z' betrifft, so erstreckt sich bei zwei homologen Systemen ihre positive Seite OZ' nach derselben Gegend des Raumes wie OZ, bei symmetrischen Systemen nach der entgegengesetzten Seite.

Fig. 16.



Aus diesen Bestimmungen erkennt man leicht, dass sich das primitive System durch drei auf einander folgende Drehungen in das secundäre überführen lässt; man hat erstens das primitive System in directem Sinne um die Achse der z zu drehen, bis OX mit OX_1 zusammenfällt, mittelst einer zweiten directen Drehung um die Gerade OX_1 bringt man die Ebenen xy und $x'y'$ zur Coïncidenz, zugleich fällt OZ mit OZ' oder mit der entgegengesetzten Seite von OZ' zusammen, jenachdem die Systeme homolog oder symmetrisch sind; mittelst einer dritten directen Drehung um die gemeinschaftliche z-Achse bringt man endlich OX_1 nach OX' und zugleich die beiden Systeme entweder zur Congruenz oder zur symmetrisch entgegengesetzten Lage. Diese Bewegungen werden durch die sphärischen Dreiecke anschaulich, welche entstehen, wenn man aus dem gemeinschaftlichen Coordinatenanfange O als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $= 1$ eine Kugelfläche beschreibt und die Coordinatenebenen erweitert, bis sie die Fläche in grössten Kreisen schneiden. Ist nämlich XYZ das dem primitiven Co-

Fig. 17.

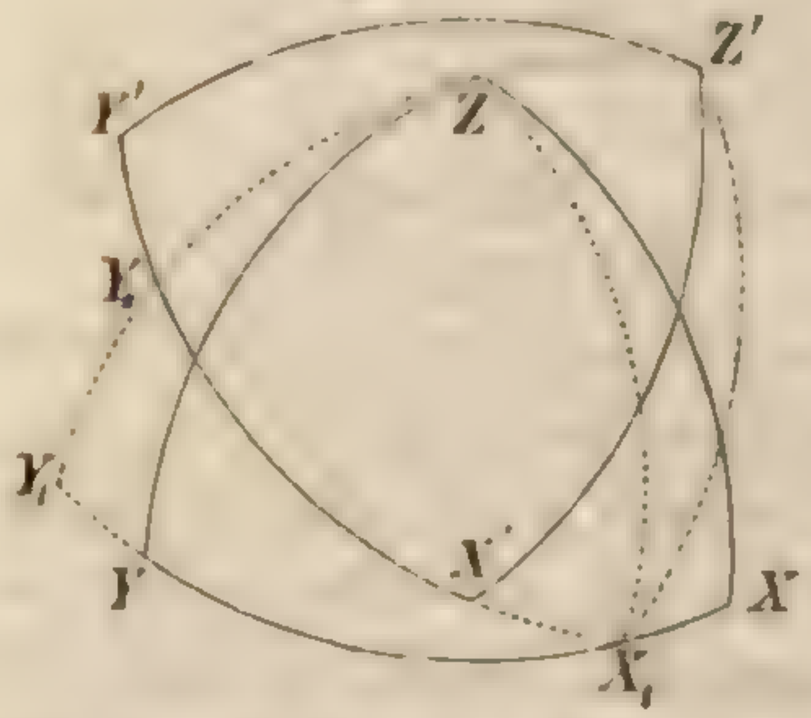
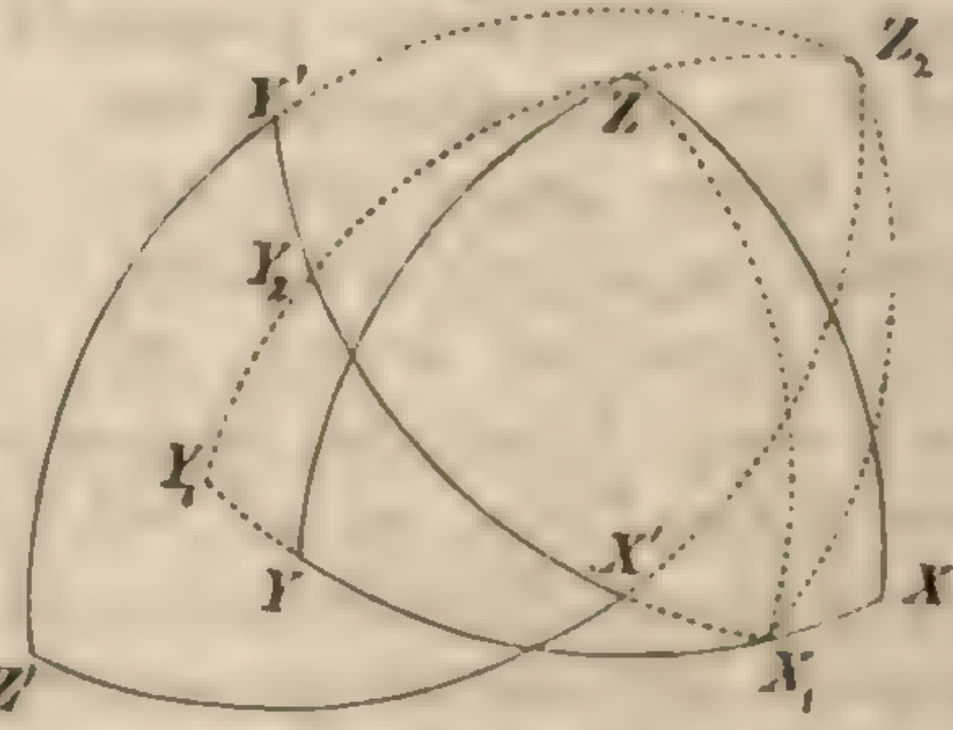


Fig. 18.



ordinatensysteme entsprechende sphärische Dreieck, $X'Y'Z'$ der Repräsentant des secundären Systemes und X_1 der Durchschnitt von XY mit $X'Y'$, so ist $XX_1 = \psi$, $\angle YX_1X' = \vartheta$, $X_1X' = \varphi$; nach der ersten Drehung hat das Dreieck XYZ die Lage $X_1Y_1Z_1$, nach der zweiten entweder die Lage X_1Y_2Z', oder bei stattfindender Symmetrie die Lage $X_1Y_2Z_2$, nach der dritten Drehung ist es entweder mit $X'Y'Z'$ zusammengefallen oder ihm symmetrisch entgegengesetzt.

Die genannten Bewegungen lassen sich analytisch mittelst des bekannten Satzes verfolgen, dass zwischen den primitiven und secundären rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes xr in der Ebene die Gleichungen

$$u = u' \cos\omega - v' \sin\omega, \qquad v = u' \sin\omega + v' \cos\omega$$

statt finden, in denen ω den Winkel bezeichnet, um welchen das primitive System uv in directem Sinne gedreht werden muss, damit die positive Richtung der u-Achse mit der positiven Richtung der u'-Achse und ebenso die positive Seite der v-Achse mit der positiven Seite der v'-Achse zusammenfalle. Bei der ersten Drehung bleiben die z ungeändert, weil OZ die feste Drehungsachse war; dagegen haben wir, wenn die Coordinaten in Beziehung auf die Achsen OX_1 und OY_1 mit x_1 und y_1 bezeichnet werden

1) $\quad x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi, \quad y = x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi;$

nach der zweiten Drehung haben die Coordinatenachsen die Lagen OX_1, OY_2, OZ', wobei wir homologe Systeme voraussetzen; hier ändern sich die x_1 nicht, dagegen verwandeln sich y_1 und z in y_2 und z'; demnach ist

2) $\quad y_1 = y_2 \cos\vartheta - z' \sin\vartheta, \quad z = y_2 \sin\vartheta + z' \cos\vartheta;$

bei der dritten Drehung bleiben die z' ungestört, dagegen geht x_1 in x' und y_2 in y' über, dies giebt:

3) $\quad x_1 = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \quad y_2 = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi.$

Für symmetrische Systeme würden die Gleichungen von ähnlicher Form sein und sich nur dadurch unterscheiden, dass $-z'$ an der Stelle von z' stünde. Nach Elimination von x_1, y_1, y_2 erhalten wir nun folgende Formeln zur Coordinatenverwandlung

4)
$$\begin{cases} x = x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ \quad - y'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ \quad \underline{\pm}\, z' \sin\psi\sin\vartheta, \\ y = x'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \\ \quad - y'(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \\ \quad \overline{\mp}\, z' \cos\psi\sin\vartheta, \\ z = x'\sin\varphi\sin\vartheta + y'\cos\varphi\sin\vartheta \,\underline{\pm}\, z'\cos\vartheta; \end{cases}$$

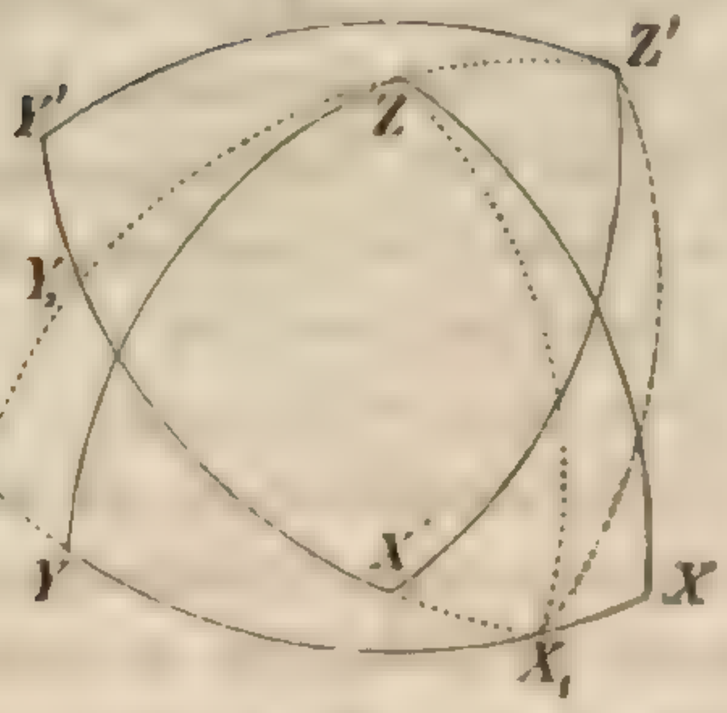
darin beziehen sich die oberen Vorzeichen auf homologe, die unteren auf symmetrische Coordinatensysteme.

Durch Vergleichung der Formeln 4) mit den früheren Formeln 7) oder 1) in §. 25 ergeben sich die Beziehungen

$$\alpha = \cos(x'x) = \quad \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta,$$
$$\beta = \cos(y'x) = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta,$$
$$\gamma = \cos(z'x) = \underline{\pm}\, \sin\psi\sin\vartheta;$$
$$\alpha' = \cos(x'y) = \quad \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta,$$
$$\beta' = \cos(y'y) = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta,$$
$$\gamma' = \cos(z'y) = \overline{\mp}\, \cos\psi\sin\vartheta;$$

$$\alpha'' = \cos(x'z) = \sin\varphi \sin\vartheta,$$
$$\beta'' = \cos(y'z) = \cos\varphi \sin\vartheta,$$
$$\gamma'' = \cos(z'z) = \pm \cos\vartheta.$$

Fig. 17.



Man kann diese Relationen auch mittelst der sphärischen Trigonometrie erhalten, wie wir kurz an zwei homologen Systemen mit Rücksicht auf die vorhin benutzte Figur nachweisen wollen. In dem Dreiecke XX_1X' kennt man $XX_1 = \psi$, $X_1X' = \varphi$, $\angle XX_1X' = 180^0 - \vartheta$, mithin ist nach der Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos(X'X) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos(180^0 - \vartheta);$$

in dem Dreiecke XX_1Y' findet sich aus $XX_1 = \psi$, $X_1Y' = 90^0 + \varphi$, $\angle XX_1Y' = 180^0 - \vartheta$,

$$\cos(Y'X) = \cos(90^0 + \varphi)\cos\psi + \sin(90^0 + \varphi)\sin\psi\cos(180^0 - \vartheta);$$

im Dreiecke XX_1Z' ist $XX_1 = \psi$, $X_1Z' = 90^0$, $\angle XX_1Z' = 90^0 - \vartheta$, mithin

$$\cos(Z'X) = \cos 90^0\cos\psi + \sin 90^0\sin\psi\cos(90^0 - \vartheta).$$

Von dem Dreiecke $X_1X'Y$ kennt man $X_1X' = \varphi$, $X_1Y = 90^0 - \psi$, $\angle YX_1X' = \vartheta$, man hat folglich

$$\cos(X'Y) = \cos\varphi\cos(90^0 - \psi) + \sin\varphi\sin(90^0 - \psi)\cos\vartheta;$$

im Dreiecke X_1YY' ist $X_1Y' = 90^0 + \varphi$, $X_1Y = 90^0 - \psi$ und der eingeschlossene Winkel $= \vartheta$, also

$$\cos(Y'Y) = \cos(90^0+\varphi)\cos(90^0-\psi) + \sin(90^0+\varphi)\sin(90^0-\psi)\cos\vartheta;$$

das Dreieck X_1YZ' enthält $X_1Z' = 90^0$, $X_1Y = 90^0 - \psi$ und $\angle YX_1Z' = 90^0 + \vartheta$ und giebt

$$\cos(Z'Y) = \cos 90^0\cos(90^0 - \psi) + \sin 90^0\sin(90^0 - \psi)\cos(90^0 + \vartheta).$$

Weil ferner aus naheliegenden Gründen $\angle X_1Z'X' = \varphi$ und $ZZ' = \vartheta$ ist, so hat man in dem Dreiecke $X'Z'Z$ die bekannten Stücke $ZZ' = \vartheta$, $X'Z' = 90^0$, $\angle X'Z'Z = 90 - \varphi$, mithin

$$\cos(X'Z) = \cos\vartheta\cos 90^0 + \sin\vartheta\sin 90^0\cos(90^0 - \varphi);$$

im Dreiecke $Y'Z'Z$ kennt man $Y'Z' = 90^0$, $ZZ' = \vartheta$, $\angle Y'Z'Z = \angle X'Z'X_1 = \varphi$, folglich ist

$$\cos(Y'Z) = \cos\vartheta\cos 90^0 + \sin\vartheta\sin 90^0\cos\varphi;$$

endlich hat man unmittelbar wegen $Z'Z = \vartheta$

$$\cos(Z'Z) = \cos\vartheta.$$

Diese Formeln stimmen mit den vorigen für $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots \gamma''$ überein, doch würde der Nachweis ihrer Allgemeingiltigkeit ein näheres und umständliches Eingehen auf alle möglichen Combinationen spitzer und stumpfer φ, ψ, ϑ erfordern, während die erste Herleitung von selbst völlig allgemein ist.

Durch Substitution der Werthe von $\alpha, \beta, \ldots \gamma''$ in die Gleichungen 10) des vorigen Paragraphen ergeben sich die folgenden Formeln:

$$5)\quad \begin{cases} x' = x(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ \quad + y(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \\ \quad + z\sin\varphi\sin\vartheta, \\ y' = -x(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ \quad - y(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \\ \quad + z\cos\varphi\sin\vartheta, \\ z' = \pm(x\sin\psi\sin\vartheta - y\cos\psi\sin\vartheta + z\cos\vartheta), \end{cases}$$

welche den Uebergang vom secundären zu dem primitiven Systeme vermitteln.

Wir erwähnen endlich noch einige besonders häufig vorkommende Specialfälle der Gleichungen 4). Wenn die Durchschnittslinie OX_1 der Ebenen xy und $x'y'$ zugleich die x-Achse ist, so hat man $\psi = 0$, mithin

$$6)\quad \begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi\cos\vartheta + y'\cos\varphi\cos\vartheta \mp z'\sin\vartheta, \\ z = x'\sin\varphi\sin\vartheta + y'\cos\varphi\sin\vartheta \pm z'\cos\vartheta. \end{cases}$$

Wird die Linie OX_1 zur Achse der x' genommen, so giebt dies $\varphi = 0$, also

$$7)\quad \begin{cases} x = x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\vartheta \pm \epsilon'\sin\psi\sin\vartheta, \\ y = x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\vartheta \mp z'\cos\psi\sin\vartheta, \\ z = y'\sin\vartheta \pm z'\cos\vartheta. \end{cases}$$

Von diesen Formeln wird oft in dem noch specielleren Falle Gebrauch gemacht, wo sämmtliche Punkte des secundären Systemes in einer Ebene liegen, welche man zur $x'y'$-Ebene wählt; es ist dann $z' = 0$, mithin

$$x = x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\vartheta,$$
$$y = x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\vartheta,$$
$$z = y'\sin\vartheta;$$

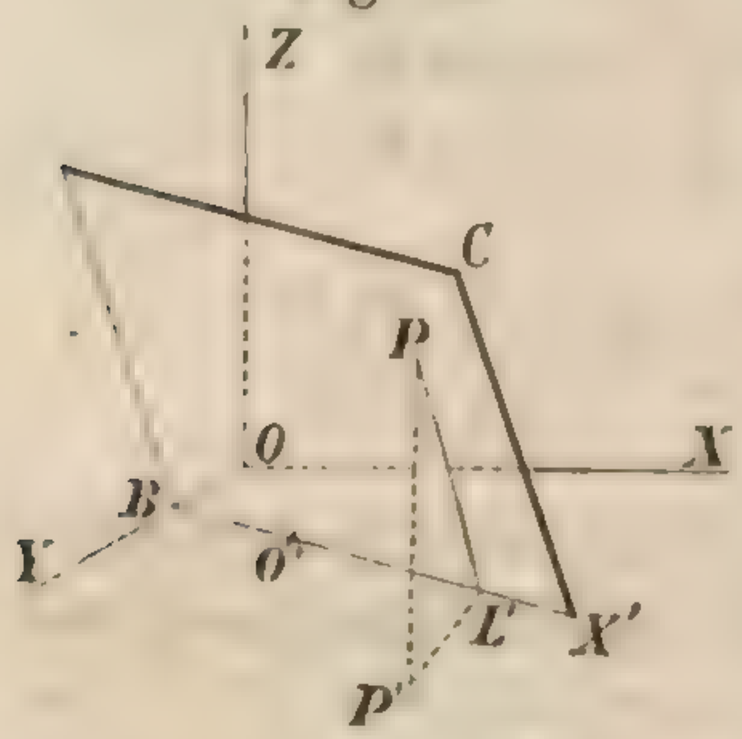
haben beide Systeme nicht denselben Coordinatenanfang, so bezeichne man die ebenen Coordinaten von O' mit a und b und setze dann $x - a$ für x, sowie $y - b$ für y, wobei aber nicht zu über-

sehen ist, dass a und b der primitiven Gleichung von OX' genügen müssen; man hat jetzt:

$$8)\quad \begin{cases} x = a + x' \cos\psi - y' \cos\vartheta \sin\psi \\ y = b + x' \sin\psi + y' \cos\vartheta \cos\psi \\ z = y' \sin\vartheta. \end{cases}$$

Dieselben Formeln können auch unabhängig von dem Vorigen durch eine einfache geometrische Betrachtung gefunden werden.

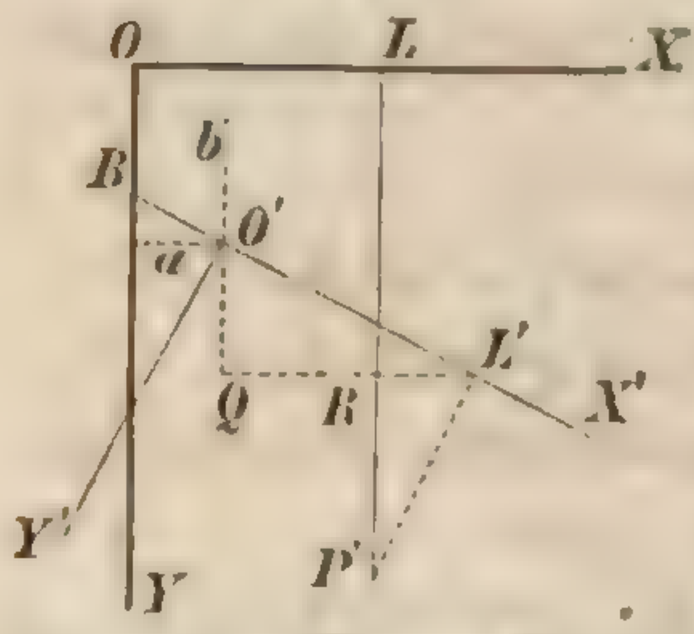
Fig. 19.



Ist nämlich BX' die Horizontalspur der Ebene BC, in welcher ein Punkt P liegt, der Winkel zwischen OX und BX' gleich ψ, der Neigungswinkel der Ebene BC gegen die Ebene xy gleich ϑ, ferner $O'X'$ der positive Theil der x'-Achse mit O' als Anfang der neuen rechtwinkligen Coordinaten, so hat man in der ersten Figur $O'L' = x'$, $L'P = y'$,

$$z = PP' = y' \sin\vartheta, \qquad L'P' = y' \cos\vartheta.$$

Fig. 20.



Ferner ist in der zweiten Figur, welche die Horizontalprojection der ersten darstellt, $\angle O'L'Q = \angle L'P'R = \psi$ und

$$x - a = L'Q - L'R = x' \cos\psi - L'P' . \sin\psi,$$
$$y - b = O'Q + RP' = x' \sin\psi + L'P' . \cos\psi,$$

woraus man vermöge des Werthes von $L'P'$ die obigen Formeln erhält. Sind die Winkel ψ und ϑ nicht unmittelbar gegeben und ist dagegen nur die Gleichung der Ebene BC bekannt, so bedarf es erst der Ermittelung von $\cos\psi$, $\sin\psi$, $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$. Sie geschieht auf folgende Weise. Die Gleichung der Ebene sei

$$9)\qquad Ax + By + Cz = D,$$

mithin die Gleichung ihrer Horizontalspur:

$$Ax + By = D \text{ oder } y = -\frac{A}{B}x + \frac{D}{B};$$

man hat nun erstlich

$$\tan\psi = -\frac{A}{B}$$

folglich, wenn das Wurzelzeichen im absoluten Sinne genommen und A stets als positiv angesehen wird,

$$\cos\psi = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \sin\psi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

ferner hat man für den Neigungswinkel ϑ

$$\cos\vartheta = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \sin\vartheta = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+C^2}},$$

mithin durch Substitution der vier angegebenen Werthe

$$10)\quad \begin{cases} x = a - \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}x' - \dfrac{AC}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}}y', \\ y = b + \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x' - \dfrac{BC}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}}y', \\ z = \dfrac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y', \end{cases}$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass immer die Gleichung

$$11)\qquad Aa + Bb = D$$

erfüllt sein muss. Nicht selten wählt man zum neuen Coordinatenanfang O' den Fusspunkt des Perpendikels vom ursprünglichen Coordinatenanfang O auf die Horizontalspur BN' der gegebenen Ebene; für diesen Fall sind die Werthe von a und b

$$12)\qquad a = \frac{AD}{A^2+B^2}, \qquad b = \frac{BD}{A^2+B^2}.$$

Die Formeln 10) vermitteln analytisch dieselbe Operation, welche in der descriptiven Geometrie als Umlegung einer Ebene in die Horizontalebene bekannt ist.

Fünftes Capitel.

Die Cylinderflächen.

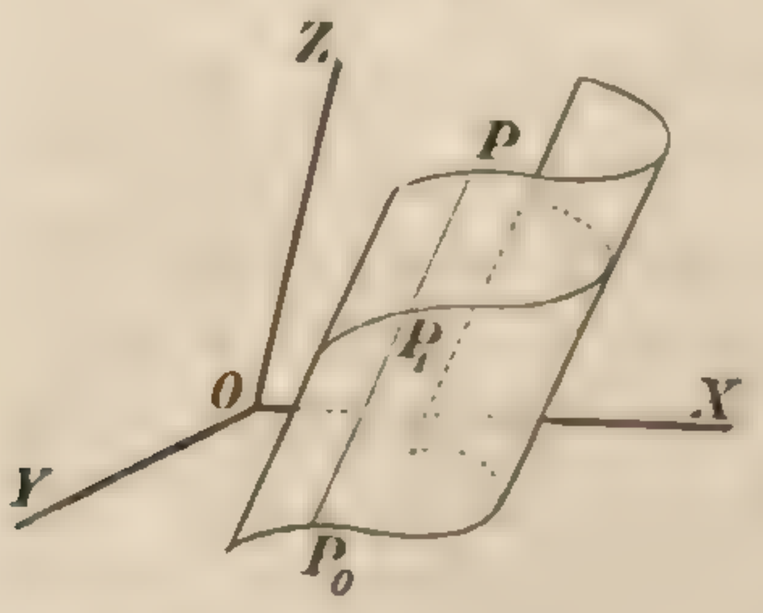
§. 27.

Entstehung und Gleichung der Cylinderflächen.

Wenn eine Gerade so bewegt wird, dass sie einer bestimmten Richtung parallel bleibt und gleichzeitig eine gegebene einfach oder doppelt gekrümmte Linie fortwährend schneidet, so entsteht eine Fläche, die im Allgemeinen eine Cylinderfläche genannt wird; die bewegliche Gerade heisst ihre Erzeugungslinie und die Curve, an welcher letztere hingleitet, die Directrix oder Leitlinie der Fläche. Durch die Richtung der erzeugenden Geraden und durch die Directrix ist die Natur der Fläche völlig bestimmt und man kann daher die Aufgabe stellen, aus jenen Daten die Gleichung der Cylinderfläche abzuleiten.

Wir betrachten zunächst den zwar specielleren aber sehr gewöhnlichen Fall, wo die Directrix eine ebene krumme Linie ist, und nehmen ihre Ebene zur Coordinatenebene xy. Die Directrix lässt sich dann als die stetige Folge der xy-Spuren aller erzeugenden Geraden, d. h. als xy-Spur der Fläche selbst ansehen. Man hat nun erstens für jeden Punkt P einer zwar veränderlichen, aber einer bestimmten Richtung parallelen Geraden die Gleichungen

Fig. 21.



1) $$x = Az + x_0, \qquad y = Bz + y_0,$$

worin A und B die constanten Richtungscoefficienten, x_0 und y_0 die veränderlichen Coordinaten der xy-Spur der erzeugenden Geraden darstellen; weil ferner die genannte Spur (P_0) auf der

gegebenen Directrix liegen soll, so müssen x_0 und y_0 einer gegebenen Gleichung, nämlich der Gleichung der Directrix, genügen, welche durch

$$2) \qquad F(x_0, y_0) = 0$$

dargestellt werden möge. Aus den vorhandenen drei Gleichungen ergiebt sich eine einzige Gleichung zwischen x, y, z, nämlich die Gleichung der Cylinderfläche, wenn man x_0 und y_0 eliminirt; das Resultat dieser Elimination kann in der Form

$$3) \qquad F(x - Az, y - Bz) = 0$$

dargestellt werden.

Ist zweitens die Directrix eine doppelt gekrümmte Curve, so müssen zwei ihrer Projectionen gegeben sein; nehmen wir hierzu die Projectionen auf die xz und yz-Ebene, so haben wir zwei Gleichungen von den Formen

$$4) \qquad \varphi(x, z) = 0, \qquad \psi(y, z) = 0.$$

Die erzeugende Gerade, deren Gleichungen wiederum

$$5) \qquad x = Az + x_0, \qquad y = Bz + y_0$$

sein mögen, schneidet der Voraussetzung zufolge die Directrix in einem Punkte, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 heissen mögen und für welche die vier Gleichungen

$$6) \qquad \begin{cases} x_1 = Az_1 + x_0, & y_1 = Bz_1 + y_0, \\ \varphi(x_1, z_1) = 0, & \psi(y_1, z_1) = 0, \end{cases}$$

zusammen gelten. Durch Elimination von x_1, y_1, z_1 folgt hieraus eine Gleichung zwischen x_0 und y_0, d. h. die Gleichung von der xy-Spur der Fläche. Bezeichnen wir diese Gleichung durch

$$7) \qquad F(x_0, y_0) = 0,$$

so ist jetzt die Sache wie vorhin und es ergiebt sich wiederum

$$8) \qquad F(x - Az, y - Bz) = 0$$

als Gleichung der Cylinderfläche.

Beispielsweise erwähnen wir diejenige Cylinderfläche, deren Directrix irgend eine Curve zweiten Grades ist; als Gleichung der Leitlinie haben wir in diesem Falle

$$9) \qquad \alpha x_0^2 + \beta y_0^2 + 2\gamma x_0 y_0 + 2\delta x_0 + 2\varepsilon y_0 + \varkappa = 0$$

mithin als Gleichung der entsprechenden Cylinderfläche zweiten Grades

$$10) \qquad \begin{cases} \alpha(x - Az)^2 + \beta(y - Bz)^2 + 2\gamma(x - Az)(y - Bz) \\ \quad + 2\delta(x - Az) + 2\varepsilon(y - Bz) + \varkappa = 0. \end{cases}$$

Am einfachsten gestaltet sich die in Nr. 8) entwickelte allgemeine Gleichung der Cylinderfläche in dem Falle, wo die

z-Achse parallel zur Richtung der erzeugenden Geraden gelegt wird; man hat dann $A = B = 0$, folglich

11) $$F(x, y) = 0, \quad (z \text{ beliebig})$$

diese Gleichung unterscheidet sich im Wesentlichen nicht von jener der ebenen Directrix; in der That erhellt auch unmittelbar von selbst, dass unter der gemachten Voraussetzung jeder Punkt auf der Cylinderfläche liegt, dessen xy-Spur der Directrix angehört und dessen z beliebig ist.

Schnitte der Cylinderflächen. Unter den verschiedenen Lagen, die eine Ebene gegen eine Cylinderfläche haben kann, sind folgende hervorzuheben. Die Ebene kann erstens parallel zur xy-Ebene sein; man hätte dann in Nr. 11) dem z einen constanten Werth zu ertheilen, da aber z in der Gleichung selber nicht vorkommt, so bleibt letztere dadurch ungeändert, d. h. alle Parallelschnitte der Cylinderfläche sind congruent, was auch geometrisch unmittelbar erhellt. Die Ebene kann zweitens parallel zur Richtung der erzeugenden Geraden, also der z-Achse parallel sein; ihre Gleichung lautet unter dieser Voraussetzung

12) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (z \text{ beliebig})$$

und wenn wir sie mit der Gleichung 11) zusammenhalten, so bekommen wir diejenigen Punkte, welche die Ebene mit der Cylinderfläche gemein hat. Dabei bleibt z immer beliebig und es besteht daher die Reihenfolge der gemeinsamen Punkte jedenfalls in einer oder mehreren Geraden, deren xy-Spuren durch die Gleichungen 11) und 12) oder die nicht wesentlich davon verschiedenen

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1$$

bestimmt werden. Schneiden sich die durch vorstehende Gleichungen ausgedrückten Spuren der Cylinderfläche und der Ebene in einer Partie von Punkten, so schneidet die Ebene die Cylinderfläche in eben so viel Geraden, welche der Richtung der Fläche parallel sind; berühren sich jene Spuren in einem Punkte, so berührt die Ebene die Cylinderfläche längs einer Geraden, haben endlich jene Spuren keinen Punkt gemein, so liegt die Ebene völlig ausserhalb der Cylinderfläche. Eine ganz beliebige Ebene, deren Gleichung

13) $$A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

sein möge, schneidet im Allgemeinen die Cylinderfläche in einer

krummen Linie. Die Projectionen der letzteren erhält man dadurch, dass man die Gleichung 13) mit der Gleichung der Cylinderfläche zusammen nimmt und eine der Coordinaten x, y, z eliminirt; die Elimination von z giebt die Gleichung der xy-Projection der Durchschnittslinie, die Elimination von y liefert die Gleichung der xz-Projection, die Elimination von x die Gleichung der yz-Projection. Will man dagegen, wie es in vielen Fällen wünschenswerth ist, die Gleichung der ebenen Durchschnittslinie selber haben, so bedarf es einer Transformation der Coordinaten, und zwar wählt man dabei die schneidende Ebene zur Ebene der neuen xy, wie dies in den Formeln 8) bis 12) in §. 26 geschehen ist; setzt man die für x, y, z dort angegebenen Werthe in die Gleichung der Cylinderfläche ein, so erhält man augenblicklich eine Gleichung zwischen den neuen ebenen Coordinaten der Durchschnittslinie, d. h. die Gleichung der letzteren. Hiernach findet man z. B. sehr leicht, dass jeder Schnitt einer Cylinderfläche zweiten Grades aus einer Curve zweiten Grades besteht.

Berührungsebenen, Tangenten und Normalen der Cylinderflächen. In dem Vorigen liegt bereits ein Mittel zur Auffindung derjenigen Ebene, welche eine gegebene Cylinderfläche in einem gegebenen Punkte P berührt. Man zieht nämlich die durch P gehende erzeugende Gerade, legt durch ihre xy-Spur eine Tangente an die gleichnamige Spur der Fläche und construirt die Ebene, welche jene Erzeugungslinie und diese Tangente enthält; die hiermit bestimmte Ebene berührt die Cylinderfläche längs jener erzeugenden Geraden. Jede durch den Berührungspunkt der Tangentialebene gehende in dieser Ebene selbst liegende Gerade heisst eine Tangente der Cylinderfläche; die auf der Berührungsebene im Berührungspunkte errichtete Senkrechte nennt man die Normale der Fläche im Punkte P.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wollen wir den elliptischen Cylinder genauer betrachten.

§. 28.

Der elliptische Cylinder.

Durchschneidet man einen beliebigen elliptischen Cylinder mittelst einer auf der Richtung der erzeugenden Geraden senkrechten Ebene, so ist die entstehende Durchschnittslinie eine geschlossene Curve zweiten Gerades, d. h. eine Ellipse, und es kann

daher jeder schiefe elliptische Cylinder auch als gerader elliptischer Cylinder angesehen werden. Denken wir uns diesen senkrechten Querschnitt als Directrix der Fläche, nennen a die grosse, b die kleine Halbachse der Ellipse, und beziehen die Fläche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen x-Achse mit a und dessen y-Achse mit b zusammenfällt, so ist die Gleichung der Fläche

1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (z \text{ beliebig}).$$

Durch den Anfangspunkt der Coordinaten legen wir ferner eine Ebene, deren Horizontalspur mit der x-Achse den Winkel ψ einschliessen und deren Neigungswinkel gegen die xy-Ebene $= \vartheta$ sein möge; ihr Durchschnitt mit der Fläche ist dann eine Curve, deren Gleichung in ebenen Coordinaten durch die Substitutionen

$$x = x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta,$$
$$y = x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta,$$
$$z = y' \sin\vartheta,$$

erhalten wird. Es ergiebt sich auf diese Weise

$$\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi}{b^2}\right)x'^2+2\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\cos\psi\sin\psi\cos\vartheta\,.\,x'y'$$
$$+\left(\frac{\sin^2\psi}{a^2}+\frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta\,.\,y'^2=1$$

also im Allgemeinen immer eine Ellipse. Von Interesse ist dabei die Untersuchung, ob die fragliche Ellipse nicht unter Umständen zu einem Kreise werden könnte, in welchem Falle die Gleichung zu der Form

$$\frac{1}{r^2}x'^2+\frac{1}{r^2}y'^2=1$$

gelangen müsste. Hierzu würden nun, da $a > b$ und $\cos\vartheta$ im Allgemeinen von Null verschieden ist, die folgenden Bedingungen erforderlich sein

$$\cos\psi\sin\psi=0,$$
$$\frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi}{b^2}=\left(\frac{\sin^2\psi}{a^2}+\frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta=\frac{1}{r^2};$$

hieraus folgt entweder

$$\cos\psi=0 \text{ mithin } \sin\psi=1 \text{ und } \cos^2\vartheta=\frac{a^2}{b^2},$$

oder

$$\sin\psi=0 \quad ,, \quad \cos\psi=1 \quad ,, \quad \cos^2\vartheta=\frac{b^2}{a^2}.$$

Die erste dieser Gleichungen ist wegen $\frac{a}{b} > 1$ unmöglich, dagegen liefert die andere zwei Beantwortungen der Frage, nämlich

$$\cos\vartheta = +\frac{b}{a} \text{ und } \cos\vartheta = -\frac{b}{a}.$$

Jeder elliptische Cylinder lässt sich also auf zwei verschiedene Arten in Kreisen durchschneiden und kann daher auf doppelte Weise als schiefer Kreiscylinder betrachtet werden. Bemerkenswerth ist dabei, dass der Neigungswinkel der Kreisebene gegen die xy-Ebene mit dem Winkel übereinkommt, unter welchem die Excentricität der Ellipse vom Endpunkte der kleinen Halbachse aus gesehen erscheint.

Nehmen wir die Ebene eines der Kreisschnitte als neue xy-Ebene und den Mittelpunkt des Kreises zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, so ist die Gleichung der Horizontalspur, die wir jetzt auch als Directrix betrachten können,

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2;$$

wir bezeichnen ferner mit

$$x = Az \text{ und } y = Bz$$

die Gleichungen derjenigen Geraden, welche durch den Kreismittelpunkt parallel zu den erzeugenden Geraden liegt (der sogenannten Cylinderachse) und haben jetzt als Gleichung des schiefen Kreiscylinders oder des ursprünglich elliptischen Cylinders

$$2) \qquad (x - Az)^2 + (y - Bz)^2 = r^2.$$

Um die Natur des Durchschnittes beurtheilen zu können, welchen irgend eine Ebene

$$3) \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

mit dem vorigen Cylinder bildet, erörtern wir zuerst den Fall, wo die genannte Ebene zur Berührungsebene wird. Hierzu gehört erstens, dass die Ebene parallel zur Richtung der erzeugenden Geraden (oder der Cylinderachse) liegt, was durch die Bedingungsgleichung

$$4) \qquad AA_1 + BB_1 + C_1 = 0$$

ausgedrückt wird; zweitens ist erforderlich, dass die Horizontalspur der Ebene die Horizontalspur der Cylinderfläche berühre; die Gleichungen der beiden genannten Spuren sind

$$Ax + By = D, \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

und die Bedingung der tangentialen Lage der Geraden gegen den Kreis wird durch die Gleichung

5) $$(A_1^2 + B_1^2) r^2 = D_1^2$$

ausgedrückt, wie man u. A. durch die Bemerkung finden kann, dass die Entfernung der Geraden vom Coordinatenanfange gleich dem Radius des Kreises sein muss. Sind nun die Bedingungen 4) und 5) gleichzeitig erfüllt, so berührt die Ebene den Cylinder längs einer Geraden; ist nur die erste, nicht aber die zweite Bedingung erfüllt, so hat die Ebene mit der Cylinderfläche entweder zwei oder gar keine Gerade gemein; ist endlich auch die Bedingung 4) nicht erfüllt, so schneidet die Ebene die Cylinderfläche in einer Ellipse, die im speciellen Falle auch zu einem Kreise werden kann.

Die Gleichungen 4) und 5) dienen zur Lösung der Aufgabe, ‚durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1 z_1$ eine Berührungsebene an die Cylinderfläche zu legen'. Nennen wir

$$A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \zeta = D_1$$

oder kürzer

6) $$L\xi + M\eta + N\zeta = 1$$

die Gleichung der gesuchten Ebene, so haben wir erstens als Bedingung, dass sie durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ geht

$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = 1,$$

ferner als Bedingungen der Berührung mit der Fläche

$$AL + BM + N = 0$$
$$(L^2 + M^2) r^2 = 1.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergeben sich die Werthe

$$L = \frac{r(x_1 - Az_1) \pm (y_1 - Bz_1)\sqrt{(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 - r^2}}{r[(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2]}$$

$$M = \frac{r(y_1 - Bz_1) \mp (x_1 - Az_1)\sqrt{(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 - r^2}}{r[(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2]}$$

$$N = -(AL + BM).$$

Man erkennt hieraus, dass keine Berührungsebene möglich ist, wenn

$$(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 < r^2$$

d. h. wenn sich der Punkt $x_1 y_1 z_1$ innerhalb des von der Cylinderfläche umschlossenen Raumes befindet, dass zweitens eine einzige Tangentialebene existirt, wenn

$$(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 = r^2,$$

in welchem Falle der Punkt $x_1 y_1 z_1$ auf der Cylinderfläche selber liegt, und dass drittens zwei verschiedene Berührungsebenen möglich sind, wenn

$$(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 > r^2,$$

d. h., wenn der Punkt $x_1 y_1 z_1$ sich in dem von der Fläche ausgeschlossenen Raume befindet. Schreiben wir im zweiten Falle einfach x, y, z für x_1, y_1, z_1, so sind die obigen Werthe

$$L = \frac{x - Az}{r^2}, \quad M = \frac{y - Bz}{r^2}, \quad N = -\frac{A(x - Az) + B(y - Bz)}{r^2}$$

und mithin lautet die Gleichung der Berührungsebene

$$7) \quad (x - Az)\xi + (y - Bz)\eta - [A(x - Az) + B(y - Bz)]\zeta = r^2,$$

wobei nicht zu übersehen ist, dass hier x, y, z unveränderlich sind, wenn ξ, η, ζ sich ändern.

Als Gleichungen derjenigen Geraden, welche die Berührungsebene im Punkte xyz senkrecht schneidet, findet man noch

$$8) \begin{cases} [A(x - Az) + B(y - Bz)](\xi - x) + (x - Az)(\zeta - z) = 0, \\ [A(x - Az) + B(y - Bz)](\eta - y) + (y - Bz)(\zeta - z) = 0; \end{cases}$$

dies sind die Gleichungen der im Punkte xyz auf der Cylinderfläche errichteten Normalen.

Sechstes Capitel.

Die Kegelflächen.

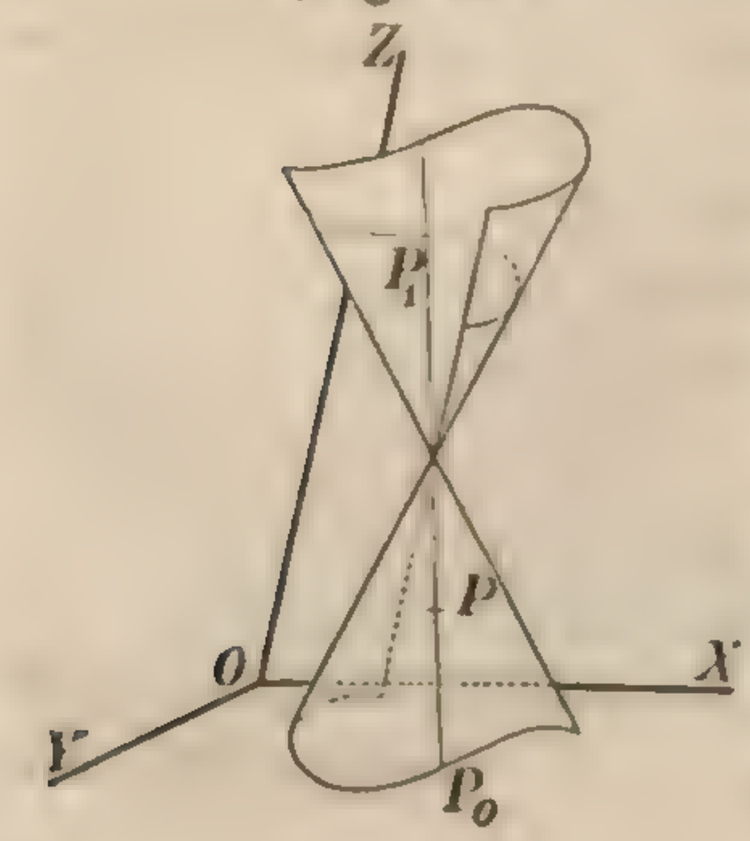
§. 29.

Entstehung und Gleichung der Kegelflächen.

Wenn eine Gerade so bewegt wird, dass sie einerseits immer durch einen bestimmten festen Punkt geht und andererseits eine gegebene einfach oder doppelt gekrümmte Linie fortwährend schneidet, so entsteht eine sogenannte Kegelfläche; der feste Punkt heisst der Mittelpunkt, die bewegliche Gerade die Erzeugungslinie und die feste Curve die Directrix oder Leitlinie der Fläche. Man muss sich dabei die erzeugende Gerade in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung vorstellen und es hat dies zur Folge, dass jede Kegelfläche aus zwei unendlichen symmetrisch gleichen Theilen besteht, die sich im Mittelpunkte vereinigen. Lässt man den Mittelpunkt der Fläche unendlich weit von der Directrix wegrücken, so degenerirt die Kegelfläche in eine Cylinderfläche und es kann daher diese als specieller Fall von jener gelten.

Wie aus der Entstehungsweise der Kegelfläche hervorgeht, ist letztere bestimmt, sobald der Mittelpunkt und die Directrix ihrer Lage nach gegeben sind; dies giebt Veranlassung zu der Aufgabe, aus den genannten Daten die Gleichung der Kegelfläche herzuleiten.

Fig. 22.



Wir betrachten zunächst den zwar speciellen, aber sehr gewöhnlichen Fall, wo die Directrix eine ebene Curve ist; ihre Ebene nehmen wir zur Ebene xy und bezeichnen die Coordinaten des Mittelpunktes mit f, g, h. Die Gleichungen irgend einer durch den Punkt fgh gehenden Geraden können jetzt unter der Form

$$x - f = M(z-h), \qquad y - g = N(z-h)$$

dargestellt werden und dabei sind die Coordinaten x_0 und y_0 ihrer xy-Spur durch die Formeln

$$x_0 - f = -Mh, \qquad y_0 - g = -Nh$$

bestimmt. Die Elimination von M und N giebt

$$1) \quad x - f = -\frac{x_0 - f}{h}(z-h), \quad y - g = -\frac{y_0 - g}{h}(z-h)$$

als Gleichungen der Geraden, welche die Punkte fgh und $x_0 y_0$ verbindet. Soll diese Gerade mit der erzeugenden Geraden (in irgend einer ihrer Lagen gedacht) identisch sein, so muss der Punkt $x_0 y_0$ der Directrix angehören, deren Gleichung durch

$$2) \qquad F(x_0, y_0) = 0$$

dargestellt werden möge. Nach Elimination von x_0 und y_0 aus den Gleichungen 1) und 2) ergiebt sich nun eine einzige Gleichung zwischen x, y, z, nämlich

$$3) \qquad F\left(\frac{fz - hx}{z-h}, \frac{gz - hy}{z-h}\right) = 0$$

und diese ist die Gleichung der Kegelfläche.

Eine doppelt gekrümmte Directrix stellen wir durch zwei Gleichungen dar, indem wir sie auf die Ebenen xz und yz projicirt denken; die betreffenden Gleichungen mögen sein

$$4) \qquad \varphi(x, z) = 0, \qquad \psi(y, z) = 0.$$

Den Gleichungen der erzeugenden Geraden geben wir wieder die Form

$$x - f = -\frac{x_0 - f}{h}(z-h), \quad y - g = -\frac{y_0 - g}{h}(z-h)$$

und nennen $x_1 y_1 z_1$ den Punkt, in welchem sie die Directrix schneidet. Für die Coordinaten dieses Punktes gelten zusammen die Gleichungen

$$5) \begin{cases} x_1 - f = -\dfrac{x_0 - f}{h}(z_1 - h), \quad y_1 - g = -\dfrac{y_0 - g}{h}(z_1 - h), \\ \varphi(x_1, z_1) = 0, \qquad \psi(x_1, z_1) = 0; \end{cases}$$

eliminirt man aus ihnen x_1, y_1, z_1, so bleibt eine Gleichung zwischen x_0 und y_0 übrig, d. h. die Gleichung der xy-Spur der Fläche. Bezeichnen wir die so entstandene Gleichung mit

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

so ist die Sache ganz wie vorhin und es ergiebt sich wiederum

$$F\left(\frac{fz - hx}{z-h}, \frac{gz - hy}{z-h}\right) = 0$$

als Gleichung der Kegelfläche.

Um die Rechnung zu vereinfachen, kann man zunächst die z-Achse durch den Mittelpunkt der Fläche legen, es ist dann $f = g = 0$, folglich

$$F\left(\frac{hx}{h-z}, \frac{hy}{h-z}\right) = 0;$$

verschiebt man nachher den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt, indem man z für $h - z$ setzt, so wird noch einfacher

$$F\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0.$$

Beispielsweise betrachten wir den schiefen Kreiskegel. Das Coordinatensystem sei rechtwinklig, r der Halbmesser der Directrix, die Coordinaten des Kreismittelpunktes mögen p und q heissen, der Mittelpunkt des Kegels liege auf der z-Achse, die Directrix in der xy-Ebene; die Gleichung der Leitlinie ist in diesem Falle

$$(x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2 = r^2,$$

mithin die Gleichung der Kegelfläche

$$\left(\frac{hx}{h-z} - p\right)^2 + \left(\frac{hy}{h-z} - q\right)^2 = r^2.$$

Nimmt man den Mittelpunkt der Fläche zum Coordinatenanfang, so dass nun die Directrix in der Entfernung h parallel zur neuen xy-Ebene liegt, so ist noch einfacher

$$\left(\frac{hx}{z} - p\right)^2 + \left(\frac{hy}{z} - q\right)^2 = r^2$$

die Gleichung der Fläche.

Schnitte der Kegelfläche. Bei der Erörterung der verschiedenen Lagen einer Ebene gegen eine Kegelfläche unterscheiden wir die beiden Hauptfälle, ob die Ebene durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht oder nicht. Findet das Erste statt, so geben die xy-Spuren der Fläche und der Ebene ein leichtes Mittel an die Hand, um die Natur des Durchschnittes beider Gebilde kennen zu lernen. Es kann nämlich die Spur der Ebene die Spur der Fläche entweder in gewissen Punkten schneiden, oder in einem Punkte berühren, oder keinen Punkt mit ihr gemein haben; im ersten Falle schneidet die Ebene die Fläche in eben so viel erzeugenden Geraden, im zweiten Falle berührt die Ebene die Fläche längs einer erzeugenden Geraden, im dritten Falle hat die Ebene ausser dem Mittelpunkte der Kegelfläche keinen weiteren Punkt mit letzterer gemein. Wenn dagegen die Ebene nicht

durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht, so wird sie diese im Allgemeinen in irgend einer krummen Linie schneiden. Die Projectionen der letzteren findet man dadurch, dass man die Gleichung der Kegelfläche mit der Gleichung der Ebene verbindet und eine der Coordinaten x, y, z eliminirt; die Elimination von z giebt die Gleichung der xy-Projection der Durchschnittslinie, die Elimination von y liefert die Gleichung xz-Projection, die Elimination von x die Gleichung der yz-Projectiom. Will man die Gleichung der ebenen Durchschnittslinie selber haben, so bedarf es einer Transformation der Coordinaten, und zwar wählt man dabei die schneidende Ebene zur Ebene der neuen xy, wie dies in den Formeln 8) bis 12) in §. 26 angegeben ist. Nach diesen Bemerkungen findet man z. B. leicht, dass der Schnitt jeder Kegelfläche, deren Directrix eine Curve zweiten Grades ist, wiederum eine Linie desselben Grades darstellt.

Berührungsebenen, Tangenten und Normalen der Kegelflächen. In dem Vorigen liegt bereits das Mittel zur Construction derjenigen Ebene, welche eine gegebene Kegelfläche in einem bestimmten Punkte P berührt. Man zieht nämlich die durch P gehende erzeugende Gerade, legt durch ihre xy-Spur eine Tangente an die gleichnamige Spur der Fläche und construirt die Ebene, welche jene Erzeugungslinie und diese Tangente enthält; die hiermit bestimmte Ebene berührt die Kegelfläche längs der genannten erzeugenden Geraden. Jede durch den Berührungspunkt gehende in dieser Ebene liegende Gerade heisst eine Tangente der Fläche; die auf der Berührungsebene im Berührungspunkte errichtete Senkrechte nennt man die Normale der Fläche in diesem Punkte.

§. 30.

Der elliptische Kegel.

Durchschneidet man einen elliptischen Kegel mittelst einer Ebene, welche auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Directrix und der Fläche senkrecht steht, also normal zur sogenannten Kegelachse ist, so bildet die Schnitteurve eine geschlossene Linie zweiten Grades, d. h. eine Ellipse. Diese nehmen wir als neue Directrix; ihre grössere Halbachse möge a, die kleinere b, die Entfernung des Kegelmittelpunktes von der Directrix soll c

heissen, die Coordinatenachsen der x, y, z legen wir der Reihe nach in a, b, c und haben so als Gleichung der Directrix

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

ferner als Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$x = -\frac{x_0}{c}(z-c), \qquad y = -\frac{y_0}{c}(z-c),$$

mithin als Gleichung der elliptischen Kegelfläche

$$1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(z-c)^2}{c^2}.$$

Noch einfacher gestaltet sich das Resultat, wenn wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Fläche verlegen; die Directrix liegt dann in der Entfernung c parallel zur xy-Ebene und hat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = c$$

zur Gleichung; für die Gleichung der Fläche erhalten wir

$$2) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2.$$

Der Durchschnitt der Fläche mit der xz-Ebene besteht aus zwei Geraden, deren Gleichungen lauten

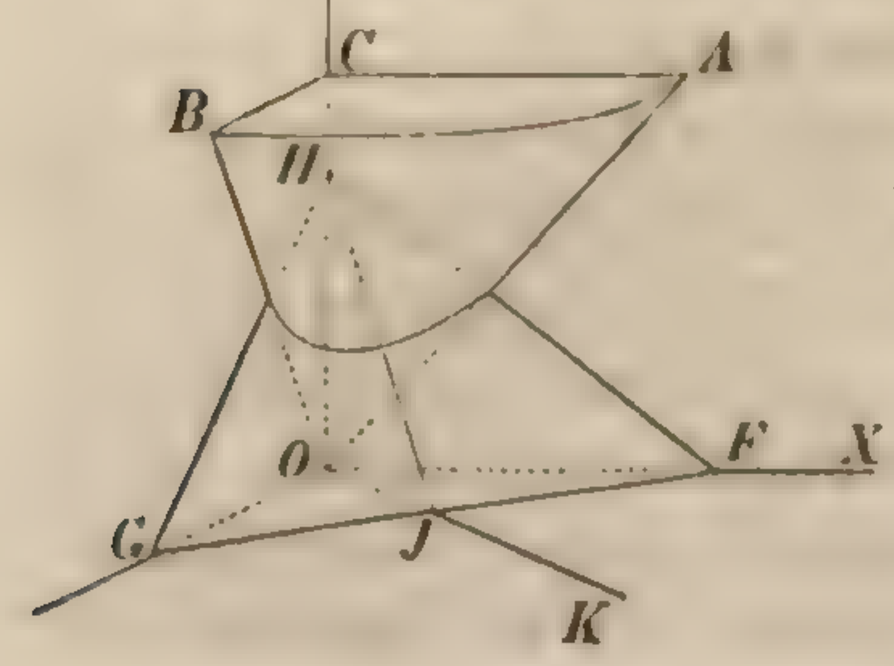
$$y = 0, \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2;$$

der Durchschnitt der Fläche mit der yz-Ebene besteht gleichfalls aus zwei durch die Gleichungen

$$x = 0, \qquad \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2$$

bestimmten Geraden. Man erkennt hieraus die geometrische Bedeutung der Verhältnisse $\frac{c}{a}$ und $\frac{c}{b}$; es ist nämlich $\frac{c}{a}$ die Cotangente des Winkels AOZ, welchen die xz-Spur der Fläche mit der z-Achse einschliesst, ebenso $\frac{c}{b}$ die Cotangente des Winkels BOZ zwischen der yz-Spur der Fläche und derselben Achse. Bezeichnen wir die genannten Winkel mit α und β, so können wir der Gleichung 2) die Form

Fig. 23.



3) $$x^2 \cot^2 \alpha + y^2 \cot^2 \beta = z^2$$

ertheilen, welche in manchen Fällen bequemer ist.

Eine durch die Gleichung

4) $$Ax + By + Cz = D$$

charakterisirte Ebene schneidet die Kegelfläche in einer Curve, deren Horizontalprojection durch Elimination von z gefunden wird; die betreffende Gleichung lautet

5) $$\left(\frac{C^2}{a^2} - \frac{A^2}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{C^2}{b^2} - \frac{B^2}{c^2}\right)y^2 - 2\frac{AB}{C^2}xy + 2\frac{AD}{c^2}x + 2\frac{BD}{c^2}y - \frac{D^2}{c^2} = 0;$$

man erkennt hieraus, dass die Horizontalprojection des Schnittes, mithin auch letzterer selbst, eine Linie zweiten Grades ist. Setzen wir zunächst $D \gtrless 0$ voraus, in welchem Falle die Ebene nicht durch den Kegelmittelpunkt (Coordinatenanfang) geht, so entscheidet sich die Natur des Durchschnittes nach der bekannten Regel, dass die Gleichung

$$A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2C_1 xy + 2D_1 x + 2E_1 y + F_1 = 0$$

eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel charaktcrisirt, jenachdem der Ausdruck

$$C_1^2 - A_1 B_1$$

negativ, positiv oder gleich Null ist. Durch Anwendung auf die Gleichung 5) folgt der Satz: der Durchschnitt der Ebene mit der Kegelfläche ist

eine Ellipse für $A^2a^2 + B^2b^2 < C^2c^2$,
„ Hyperbel „ $A^2a^2 + B^2b^2 > C^2c^2$,
„ Parabel „ $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2c^2$,

immer $D \gtrless 0$ vorausgesetzt. — Lassen wir zweitens D in Null übergehen, so reducirt sich im ersten Falle die Ellipse auf einen blossen Punkt und die Ebene hat dann mit der Kegelfläche nur den Kegelmittelpunkt gemein; im zweiten Falle degenerirt die Hyperbel zu zwei Geraden, im dritten Falle verwandelt sich die Parabel in eine Gerade und die Ebene berührt die Kegelfläche längs dieser Geraden. Die letzteren Resultate können leicht mittelst der Directrix verificirt werden. Der Durchschnitt der Ebene

$$Ax + By + Cz = 0$$

mit der Ebene der Directrix ist nämlich für $z = 0$

$$Ax + By + Cc = 0$$

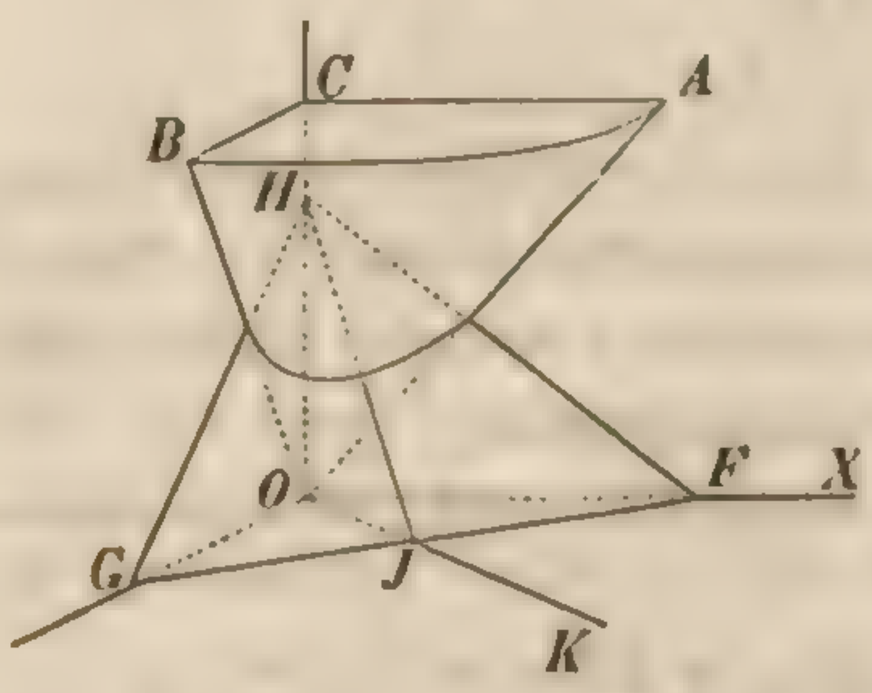
d. h. eine Gerade; diese hat mit der Directrix

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

keinen Punkt gemein, wenn $A^2a^2+B^2b^2<C^2c^2$; sie schneidet dieselbe in zwei Punkten, wenn $A^2a^2+B^2b^2>C^2c^2$, sie berührt die Directrix, wenn $A^2a^2+B^2b^2=C^2c^2$; hieraus folgen unmittelbar die angegebenen Eigenschaften der Ebene.

Um die Gleichung der Durchschnittslinie selber zu erhalten, nehmen wir die Schnittebene FGH zur Ebene $x'y'$ eines neuen Coordinatensystemes; die Strecke OG, welche die Ebene von der y-Achse abschneidet, heisse g, der Anfangspunkt der neuen Coordinaten sei G, ferner GF die Achse der positiven x', $\angle GFO = \psi$ und der Neigungswinkel HJK der Ebene gegen die xy-Ebene $= \vartheta$. Wir haben jetzt nach den Formeln 8) in §. 26

Fig. 23.



$$\begin{aligned} x &= x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\vartheta,\\ y &= g + x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\vartheta,\\ z &= y'\sin\vartheta \end{aligned}$$

mithin durch Substitution in die Gleichung 2) und bei gehöriger Anordnung

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi}{b^2}\right)x'^2+\left\{\left(\frac{\sin^2\psi}{a^2}+\frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta-\frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right\}y'^2\\ &\qquad+2\frac{(a^2-b^2)\sin\psi\cos\psi\cos\vartheta}{a^2b^2}x'y'\\ &\qquad+2\frac{g\sin\psi}{b^2}x'+2\frac{g\cos\psi\cos\vartheta}{b^2}y'+\frac{g^2}{b^2}=0. \end{aligned}\right.$$

Hieraus lassen sich nach bekannten Methoden die Achsen des Schnittes ihrer Lage und Grösse nach bestimmen, wobei wir nicht weiter verweilen wollen. Von Interesse ist nur noch die Frage, ob die durch Nr. 6) dargestellte Curve nicht unter Umständen zu einem Kreise werden kann. Hierzu würden die Bedingungen

$$7)\quad \frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi}{b^2}=\left(\frac{\sin^2\psi}{a^2}+\frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta-\frac{\sin^2\vartheta}{c^2},$$

$$8)\quad (a^2-b^2)\cos\vartheta\cos\psi\sin\psi=0$$

gehören, von denen die letzte wegen der Voraussetzund $a>b$ nur durch

$$\vartheta = 90^0 \quad \text{oder} \quad \psi = 90^0 \quad \text{oder} \quad \psi = 0^0$$

erfüllbar ist. Für $\vartheta = 90^0$ liefert die Gleichung 7)

$$\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\psi}{b}\right)^2 = -\frac{1}{c^2}$$

also ein unmögliches Resultat; für $\psi = 90^0$ wird aus Nr. 7)

$$\frac{1}{b^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2} \quad \text{oder} \quad \sin\vartheta = \frac{c\sqrt{b^2-a^2}}{b\sqrt{a^2+c^2}},$$

mithin ϑ imaginär (wegen $b < a$); endlich für $\psi = 0$ ergiebt sich aus Nr. 7)

$$9) \quad \frac{1}{a^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{b^2} - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2} \quad \text{oder} \quad \sin\vartheta = \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Giebt man dem für $\sin\vartheta$ erhaltenen Werthe die Form

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

so erscheint $\sin\vartheta$ als Product zweier ächten Brüche, mithin ist der Werth von $\sin\vartheta$ ein ächter Bruch, folglich ϑ immer möglich und zwar zweideutig, weil man dafür eben so wohl einen spitzen, als einen stumpfen Winkel nehmen kann. Demnach wird der elliptische Kegel durch zwei Systeme von Ebenen in Kreisen geschnitten; alle diese Ebenen sind der x-Achse parallel und bilden mit der xy-Ebene gleiche Winkel entweder nach der positiven oder nach der negativen Seite der z hin. Stellt man die Gleichung einer der x-Achse parallelen Ebene in der Form

$$10) \quad By + Cz = D$$

dar, so bestimmt sich ihr Neigungswinkel gegen die xy-Ebene durch die Formel

$$\cos^2\vartheta = \frac{C^2}{B^2+C^2} \quad \text{oder} \quad \sin^2\vartheta = \frac{B^2}{B^2+C^2};$$

durch Substitution des letzteren Ausdrucks folgt aus Nr. 9), dass die Ebene 10) die Kegelfläche in einem Kreise schneidet, wenn die Bedingung

$$11) \quad \frac{B^2}{C^2} = \frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2+c^2)}$$

erfüllt ist.

Wir lösen endlich noch die Aufgabe, ‚durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1 z_1$ eine Berührungsebene an die elliptische Kegelfläche zu legen'. Da die gesuchte Ebene jedenfalls durch den Mittelpunkt der Fläche gehen muss, so ist ihre Gleichung von der Form

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0;$$

ferner haben wir, weil diese Ebene durch den Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ gehen soll

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0,$$

endlich wegen der verlangten Berührung

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2c^2.$$

Einfacher werden diese Gleichungen, wenn wir

$$\frac{A}{C} = M, \qquad \frac{B}{C} = N$$

setzen; die Gleichung der Berührungsebene ist dann

12) $$M\xi + N\eta + \zeta = 0$$

und darin gelten für M und N die Bedingungen

$$Mx_1 + Ny_1 + z_1 = 0$$
$$M^2a^2 + N^2b^2 = c^2.$$

Aus diesen Gleichungen findet sich

$$M = \frac{-b^2x_1z_1 \pm y_1\sqrt{b^2c^2x_1^2 + a^2c^2y_1^2 - a^2b^2z_1^2}}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2},$$

$$N = \frac{-a^2y_1z_1 \mp x_1\sqrt{b^2c^2x_1^2 + a^2c^2y_1^2 - a^2b^2z_1^2}}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2}.$$

Demnach sind zwei berührende Ebenen, eine Tangentialebene, oder keine derartige Ebene möglich, jenachdem

$$b^2c^2x_1^2 + a^2c^2y_1^2 \gtreqless a^2b^2z_1^2$$

oder

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 \gtreqless \left(\frac{z_1}{c}\right)^2,$$

d. h. jenachdem der Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ ausserhalb, auf oder innerhalb des von der Kegelfläche umschlossenen Raumes liegt. Schreiben wir im zweiten Falle x, y, z für x_1, y_1, z_1, so ist

$$-\frac{c^2x}{a^2z}\xi - \frac{c^2y}{b^2z}\eta + \zeta = 0$$

oder symmetrischer

13) $$\frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta = \frac{z}{c^2}\zeta$$

die Gleichung der durch den Punkt xyz der Kegelfläche gehenden Berührungsebene.

Hieraus findet man leicht

14) $$\xi - x = -\frac{c^2x}{a^2z}(\zeta - z), \qquad \eta - y = -\frac{c^2y}{b^2z}(\zeta - z)$$

als Gleichungen der im Punkte xyz auf der Kegelfläche errichteten Normalen.

§. 31.

Der elliptische Kegel als schiefer Kreiskegel.

Nimmt man irgend einen Kreisschnitt des elliptischen Kegels als neue Directrix, so kann der elliptische Kegel auch als schiefer Kreiskegel angesehen werden, wodurch die Formeln eine andere Gestalt bekommen. Die Ebene eines Kreisschnittes wählen wir zur xy-Ebene eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen Anfang im Mittelpunkte des Kreisschnittes liegen möge; die Gleichung der Directrix, welche gleichzeitig die Horizontalspur des Kegels bildet, ist jetzt

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2.$$

Bezeichnen wir ferner mit a, b, c die Coordinaten der Kegelspitze, so sind die Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$x - a = -\frac{x_0 - a}{c}(z - c), \quad y - b = -\frac{y_0 - b}{c}(z - c);$$

durch Elimination von x_0 und y_0 ergiebt sich

1) $$(az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = r^2(z - c)^2$$

als Gleichung der Kegelfläche.

Ihr Durchschnitt mit einer beliebigen durch die Gleichung

2) $$Ax + By + Cz = D$$

repräsentirten Ebene ist eine Linie zweiten Grades, deren Horizontalprojection sich durch Elimination von z aus den Gleichungen beider Flächen bestimmt; die Gleichung der erwähnten Horizontalprojection ist von der Form

3) $$A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2C_1 xy + 2D_1 x + 2E_1 y + F_1 = 0$$

und darin

$$A_1 = (Aa + Cc)^2 + A^2(b^2 - r^2),$$
$$B_1 = (Bb + Cc)^2 + B^2(a^2 - r^2),$$
$$C_1 = (Aa + Cc)Ba + (Bb + Cc)Ab - ABr^2.$$

Vermöge dieser Werthe erhält man nach gehöriger Reduction *)

---

*) Bezeichnet man nämlich zur Abkürzung $Aa + Cc$ mit α und $Bb + Cc$ mit β, so findet sich zunächst

$$C_1^2 - A_1 B_1 = r^2 [A^2(\beta - Bb)^2 + B^2(\alpha - Aa)^2] - (\alpha\beta - ABab)^2$$

welcher Ausdruck nach Substitution der Werthe von α und β die oben erwähnte Form annimmt.

$$C_1^2 - A_1 B_1 = (A^2 + B^2) r^2 - (Aa + Bb + Cc)^2$$

und hieraus ergiebt sich, dass der Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, jenachdem

4) $$r^2 \lessgtr \frac{(Aa + Bb + Cc)^2}{A^2 + B^2}.$$

Die geometrische Bedeutung hiervon wird auf folgende Weise sichtbar. Durch den Mittelpunkt der Kegelfläche legen wir parallel zur schneidenden Ebene eine Hilfsebene; die Gleichung der letzteren ist

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$$

und die Gleichung ihrer Horizontalspur ($z = 0$)

$$Ax + By = Aa + Bb + Cc.$$

Für die Entfernung p dieser Geraden vom Coordinatenanfange ergiebt sich

$$p^2 = \frac{(Aa + Bb + Cc)^2}{A^2 + B^2};$$

demnach ist der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem (im absoluten Sinne) $r < p$, $r = p$ oder $r > p$ ist, d. h. jenachdem die Horizontalspur der Hilfsebene ausserhalb der Directrix liegt, sie berührt oder schneidet.

Geht die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kegelfläche, ist also

5) $$Aa + Bb + Cc = D,$$

so wird die im ersten der in Nr. 4) genannten Fälle, d. h. die für

$$r^2 < \frac{D^2}{A^2 + B^2}$$

entstehende Ellipse zu einem Punkte, die für

$$r^2 = \frac{D^2}{A^2 + B^2}$$

vorhandene Parabel degenerirt in eine Gerade, längs welcher die Ebene den Kegel berührt, endlich degenerirt die der Bedingung

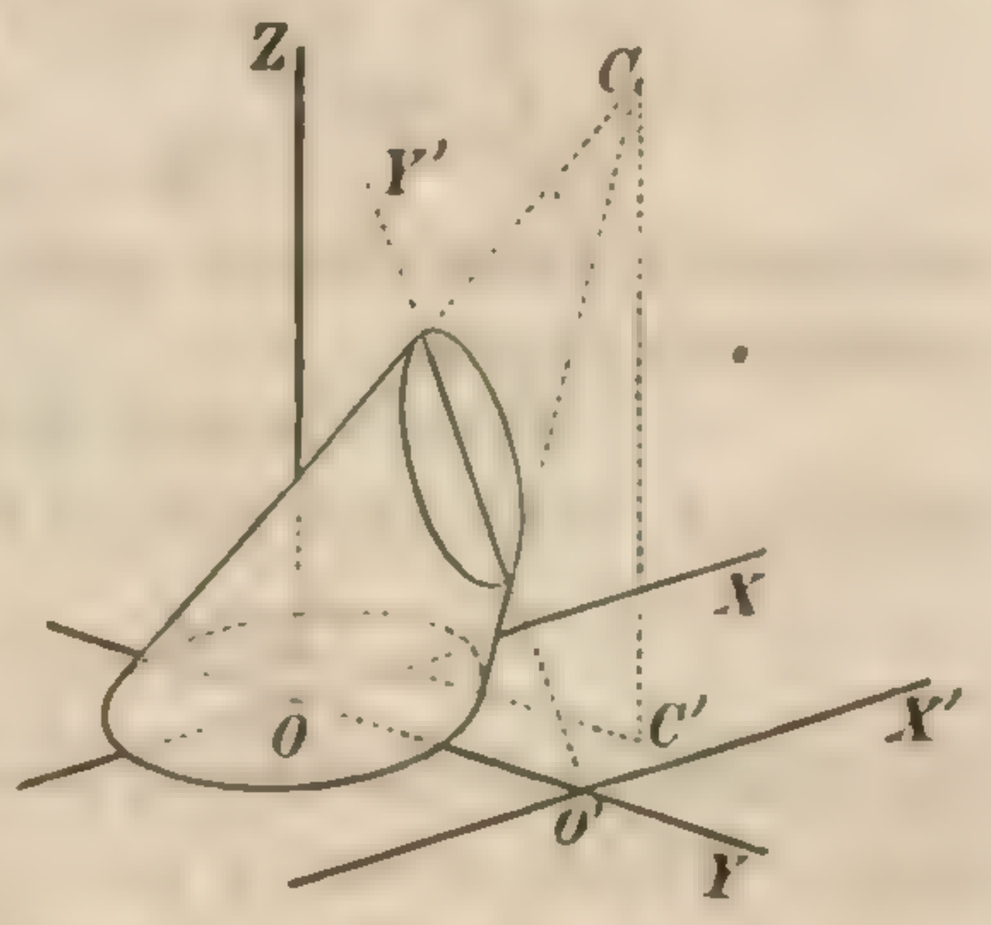
$$r^2 > \frac{D^2}{A^2 + B^2}$$

entsprechende Hyperbel in zwei durch den Mittelpunkt der Fläche gehende Gerade.

Um die Gleichung des Kegelschnittes in möglichst einfacher Form zu erhalten, legen wir die bisher beliebige x-Achse parallel zur Horizontalspur der schneidenden Ebene, so dass die y-Achse mit der Senkrechten vom Coordinatenanfange auf jene Spur zu-

sammenfällt; den Fusspunkt dieses Perpendikels nehmen wir zum Anfangspunkte eines neuen rechtwinkligen Systemes, dessen x'-Achse die Horizontalspur der Schnittebene ist, wobei die positiven x' in derselben Richtung wie die positiven x gezählt werden mögen; die y'-Achse legen wir in die Schnittebene und ihre positive Seite nach der positiven Seite der z-Achse zu; endlich sei k der Abstand des neuen von dem früheren Coordinatenanfange und ϑ der Neigungswinkel der $x'y'$-Ebene gegen die xy-Ebene, d. h. der Winkel zwischen den Richtungen der positiven y und y'. Zufolge dieser Bestimmungen geschieht der Uebergang von dem ursprünglichen zu dem jetzigen Coordinatensysteme mittelst der Substitutionen (Nr. 8 in §. 26 für $\psi = 0$)

Fig. 24.



$$x = x', \qquad y = k + y' \cos\vartheta, \qquad z = y' \sin\vartheta;$$

die Gleichung 1) erhält jetzt die Form

$$6) \quad A' x'^2 + B' y'^2 + 2C' x' y' + 2D' x' + 2E' y' + F' = 0$$

und darin ist

$$A' = c^2, \quad B' = (a^2 - r^2)\sin^2\vartheta + (b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)^2,$$
$$C' = -ac\sin\vartheta, \quad D' = 0,$$
$$E' = c\,[r^2\sin^2\vartheta - k\,(b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)], \quad F' = c^2\,(k^2 - r^2).$$

Hieraus folgt

$$C'^2 - A'B' = c^2\,[r^2\sin^2\vartheta - (b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)^2]$$

und dieser Werth giebt zu erkennen, dass der Schnitt zu einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel wird, jenachdem

$$r^2 \gtreqless (b - c\cot\vartheta)^2$$

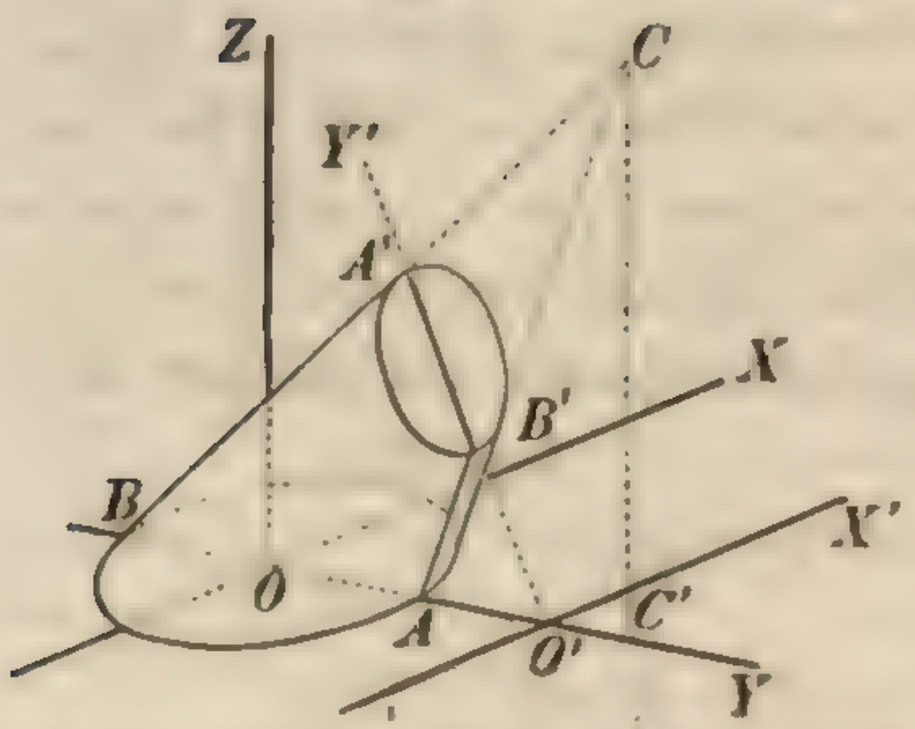
ausfällt. Dieses Resultat stimmt, wie leicht zu sehen ist, mit dem vorhin erhaltenen überein.

Soll der Kegelschnitt zu einem Kreise werden, so müssen die Bedingungen $A' = B'$ und $C' = 0$, d. h.

$$c^2 = (a^2 - r^2)\sin^2\vartheta + (b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)^2,$$
$$ac\sin\vartheta = 0,$$

erfüllt sein. Die zweite dieser Gleichungen wird durch $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = 180^0$ erfüllt, doch giebt dies nichts Anderes, als eine zur

Fig. 25.



Directrix parallele Ebene; da ferner c nicht $= 0$ sein kann, weil sonst die Kegelfläche zu einer Ebene degeneriren würde, so bleibt nur noch $a = 0$ übrig, wodurch gesagt ist, dass der Anfangspunkt des neuen Coordinatensystemes mit dem Mittelpunkte der Kegelfläche in einer und derselben auf der Directrixebene senkrechten Ebene liegen muss. Die erste der Bedingungsgleichungen wird jetzt

$$c^2 = -r^2 \sin^2\vartheta + (b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)^2$$

und liefert, wenn $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ durch $\tan\vartheta$ ausgedrückt werden

$$7) \qquad \tan\vartheta = \frac{2bc}{b^2 - c^2 - r^2}.$$

Die geometrische Bedeutung hiervon ergiebt sich, wenn man die beiden Winkel α und $\beta < \alpha$ in Rechnung bringt, welche die yz-Spuren AC und BC der Kegelfläche mit der y-Achse einschliessen; man hat nämlich

$$\tan\alpha = \frac{c}{b-r}, \qquad \tan\beta = \frac{c}{b+r}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2bc}{b^2 - c^2 - r^2}$$

folglich $\alpha + \beta = \vartheta = \angle\, Y O' A'$. Die yz-Spur der Schnittebene liegt demnach so, dass $\angle\, CB'A' = \angle\, CBA$ ist; der hiermit bestimmte Kreisschnitt des schiefen Kegels heisst dessen **Wechselschnitt.**

Soll durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1 z_1$ eine berührende Ebene an einen Kreiskegel gelegt werden, so bezeichne man die Gleichung der gesuchten Ebene vorläufig mit

$$8) \qquad L\xi + M\eta + N\zeta = 1;$$

dass sie den gegebenen Punkt $x_1 y_1 z_1$ enthalten muss, wird ausgedrückt durch

$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = 1,$$

die Berührung der verlangten Ebene mit der Fläche liefert ferner die Bedingungen

$$La + Mb + Nc = 1, \qquad r^2 = \frac{1}{L^2 + M^2}.$$

Eliminirt man N aus den beiden ersten Bedingungsgleichungen, so hat man

$$(az_1 - cx_1)L + (bz_1 - cy_1)M = z_1 - c,$$

$$L^2 + M^2 = \frac{1}{r^2},$$

und daraus finden sich die folgenden Werthe von L und M, in denen zur Abkürzung

$$az_1 - cx_1 = u, \qquad bz_1 - cy_1 = v$$

gesetzt worden ist:

$$L = \frac{ru(z_1 - c) \pm v\sqrt{u^2 + v^2 - r^2(z_1 - c)^2}}{r(u^2 + v^2)},$$

$$M = \frac{rv(z_1 - c) \mp u\sqrt{u^2 + v^2 - r^2(z_1 - c)^2}}{r(u^2 + v^2)},$$

$$N = \frac{1 - aL - bM}{c}.$$

Demnach hat die Aufgabe zwei Auflösungen, eine oder keine Auflösung, jenachdem

$$u^2 + v^2 \gtreqless r^2(z_1 - c)^2$$

d. h. jenachdem der Punkt $x_1 y_1 z_1$ ausserhalb des von der Kegelfläche umschlossenen Raumes, auf der Fläche oder innerhalb jenes Raumes liegt. Im zweiten Falle, wo wir x, y, z für x_1, y_1, z_1 schreiben, lautet die Gleichung der Berührungsebene bei vollständiger Entwickelung

$$9) \quad cu\xi + cv\eta + [r^2(z - c) - au - bv]\zeta = cr^2(z - c).$$

Hieraus ergeben sich noch die Gleichungen

$$10) \quad \begin{cases} \xi - x = \dfrac{cu}{r^2(z - c) - au - bv}(\zeta - z) \\ \eta - y = \dfrac{cv}{r^2(z - c) - au - bv}(\zeta - z) \end{cases}$$

als Gleichungen der durch den Punkt xyz der Kegelfläche gehenden Normalen.

Siebentes Capitel.

Die Umdrehungsflächen.

§. 32.

Entstehung und Gleichung der Umdrehungsflächen.

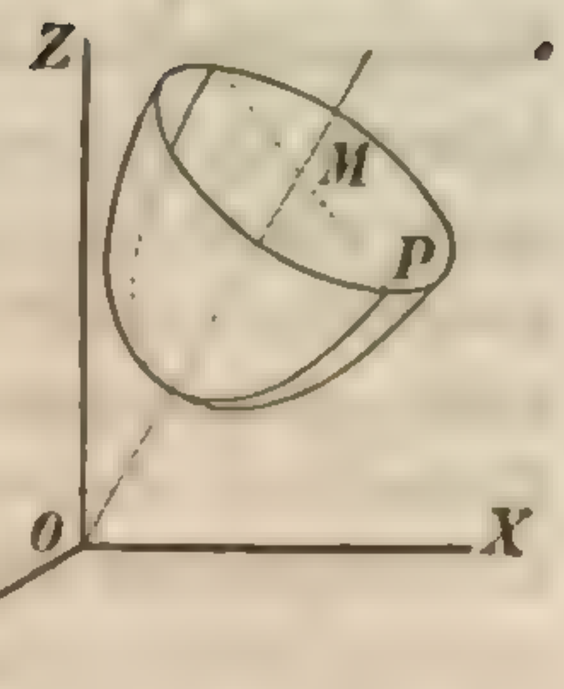
Denkt man sich irgend eine einfach oder doppelt gekrümmte Linie mit einer ihrer Lage nach bestimmten Geraden verbunden, so ist immer eine solche drehende Bewegung der Curve möglich, dass jeder ihrer Punkte einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt auf der festen Geraden liegt; die rotirende Curve erzeugt bei dieser Bewegung eine Fläche, welche eine Rotations- oder Umdrehungsfläche genannt wird; die unveränderliche Gerade heisst ihre Achse.

Aus dieser Entstehung der Fläche geht unmittelbar hervor, dass alle auf der Drehungsachse senkrechten Schnitte der Fläche Kreise sind, deren Halbmesser im Allgemeinen verschieden ausfallen, jenachdem die Schnitte durch verschiedene Punkte der Achse gelegt werden. Diese Kreise werden die Parallelkreise der Fläche genannt. Ferner ist leicht einzusehen, dass die Fläche von allen Ebenen, welche die Drehungsachse in sich enthält, in congruenten Curven geschnitten wird; diese Linien einfacher Krümmung, durch deren Drehung um die Achse gleichfalls die Rotationsfläche erzeugt werden kann, heissen die Meridiane der Fläche.

Um die allgemeine Form kennen zu lernen, unter welcher die Gleichung einer Umdrehungsfläche enthalten ist, denken wir uns durch einen beliebigen Punkt der Drehungsachse ein rechtwinkliges Coordinatensystem gelegt und nennen α, β, γ die Richtungswinkel der Drehungsachse; ferner sei durch einen beliebigen

Punkt xyz der Fläche ein Parallelkreis gelegt, q dessen Halbmesser und p der Abstand seines Mittelpunktes vom Coordinatenanfang. Die Geraden $OM = p$ und $MP = q$ lassen sich nun als die ebenen rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Meridiancurve betrachten und es existirt daher zwischen p und q eine Gleichung von der Form

Fig. 26.



$$1) \qquad q = f(p),$$

oder, wenn statt q der Radiusvector $OP = r$ in Rechnung gebracht wird,

$$\sqrt{r^2 - p^2} = f(p);$$

daraus folgt

$$2) \qquad r^2 = p^2 + [f(p)]^2$$

welche Gleichung überhaupt unter der Form

$$3) \qquad r^2 = F(p)$$

enthalten ist. Durch Substitution der bekannten Werthe

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$p = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

ergiebt sich nun als Gleichung der Rotationsfläche

$$4) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = F(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma).$$

Geht die Drehungsachse nicht durch den Coordinatenanfang, sondern durch einen Punkt abc, so bedarf es nur einer Verschiebung des Coordinatensystemes nach diesem Punkte; man erhält dann

$$5) \quad \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \\ = F[(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma] \end{cases}$$

als allgemeinste Gleichung der Rotationsflächen.

Am einfachsten gestaltet sich diese Gleichung, wenn man eine der Coordinatenachsen mit der Drehungsachse zusammenfallen lässt; gewöhnlich wählt man hierzu entweder die x-Achse oder die z-Achse. Im ersten Falle ist $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 90^0$, mithin nach Nr. 4)

$$x^2 + y^2 + z^2 = F(x),$$

welcher Gleichung auch die Form

$$y^2 + z^2 = \Phi(x)$$

ertheilt werden kann; im zweiten Falle ergiebt sich analog

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 = F(z)$$

$$x^2 + y^2 = \Psi(z).$$

Diese Entwickelungen liefern unmittelbar die Gleichung der Rotationsfläche, wenn die Gleichung des Meridianes [$q = f(p)$] bekannt ist, was namentlich in dem Falle statt findet, wo die rotirende Curve eine einfach gekrümmte ist und ihre Ebene die Drehungsachse enthält. Finden diese Umstände nicht gleichzeitig statt, so hat man den folgenden Weg einzuschlagen, wobei der Einfachheit wegen vorausgesetzt ist, dass die z-Achse mit der Drehungsachse zusammenfällt. Bei der primitiven Lage der rotirenden Curve mögen die Coordinaten irgend eines ihrer Punkte mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet werden, die Projectionen der Curve auf die beiden Verticalebenen sind dann bestimmt durch zwei Gleichungen von den Formen

6) $$x_0 = \varphi(z_0), \qquad y_0 = \psi(z_0);$$

dreht sich nun die Curve um die z-Achse, so erhält der Punkt $x_0 y_0 z_0$ eine andere Lage, und zwar mögen x, y, z seine neuen Coordinaten in dem Falle heissen, wo die Drehung den Winkel ω von der positiven Seite der x-Achse nach der positiven Seite der y-Achse hin durchlaufen hat. Man kann diesen Winkel in der Horizontalprojection sichtbar machen, wenn man die einander gleichen Vectoren der Punkte $x_0 y_0$ und $x y$ zieht, ω ist dann der Winkel zwischen beiden Vectoren. Aus sehr einfachen Gründen hat man

$$x_0 = x \cos\omega + y \sin\omega, \quad y_0 = -x \sin\omega + y \cos\omega, \quad z_0 = z,$$

mithin nach Nr. 6)

7) $$x \cos\omega + y \sin\omega = \varphi(z), \quad -x \sin\omega + y \cos\omega = \psi(z);$$

dies sind die Gleichungen der rotirenden Curve in irgend einer ihrer Lagen, wobei der Winkel ω das Intervall von 0^0 bis 360^0 zu durchlaufen hat, wenn alle möglichen Lagen der Curve zum Vorschein kommen sollen. Die Elimination von ω giebt

8) $$x^2 + y^2 = [\varphi(z)]^2 + [\psi(z)]^2,$$

als Gleichung der erzeugten Rotationsfläche.

Beispiele hierzu liefern die Curven zweiten Grades, deren entsprechende Flächen in den Fällen sehr einfache Gleichungen erhalten, wo die Drehung um eine der Hauptachsen vor sich geht. Denken wir uns die Ebene xz als die Ebene der in ihrer ursprünglichen Lage befindlichen rotirenden Curve, so haben wir für eine durch den Coordinatenanfang gehende Gerade

$$x_0 = \frac{a}{c} z_0, \qquad y_0 = 0,$$

mithin für die entstandene Kegelfläche

9) $$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{c}z\right)^2 \text{ oder } \frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2};$$

dasselbe Resultat ergiebt sich aus der Gleichung 2) in §. 30, wenn man den dort erwähnten elliptischen Kegel für $b = a$ zu einem geraden Kreiskegel werden lässt.

Die Gleichungen einer in der Ebene xz befindlichen Ellipse sind

$$x_0 = a\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}, \qquad y_0 = 0,$$

wobei die Achsen der Ellipse zu Coordinatenachsen genommen sind; die Gleichung der erzeugten Umdrehungsfläche, des sogenannten Rotationsellipsoides, ist folglich

$$x^2 + y^2 = a^2\left[1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right]$$

oder bei besserer Anordnung

10) $$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hierbei müssen wir die Fälle $a > c$, $a < c$ und $a = c$ unterscheiden. Im ersten Falle ist die Drehung um die kleinere Halbachse vor sich gegangen und das Ellipsoid heisst in diesem Falle ein abgeplattetes; im zweiten Falle ist die Drehungsachse die grössere Halbachse und das Ellipsoid ein gestrecktes; im letzten Falle wird die rotirende Curve zu einem Kreise, mithin das Rotationsellipsoid zu einer Kugelfläche; die Gleichung der letzteren pflegt man gewöhnlich unter der Form

11) $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

darzustellen, wobei $r = c = a$ den constanten Halbmesser bedeutet.

Für eine Hyperbel, deren Hauptachse $2a$ mit der x-Achse und deren Nebenachse $2c$ mit der z-Achse zusammenfällt, hat man

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2 = 1 \text{ oder } x_0 = a\sqrt{1+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}, \quad y_0 = 0;$$

mithin als Gleichung der erzeugten Umdrehungsfläche

$$x^2 + y^2 = a^2\left[1+\left(\frac{z}{c}\right)^2\right]$$

oder

12) $$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Diese Fläche heisst das einfache Rotationshyperboloid.

Ist dagegen c die Haupt- und a die Nebenhalbachse der Meridiancurve, so gelten für sie die Gleichungen

$$\left(\frac{z_0}{c}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2 = 1 \text{ oder } x_0 = a\sqrt{\left(\frac{z_0}{c}\right)^2 - 1}, \quad y_0 = 0,$$

und daraus ergiebt sich als Gleichung der Umdrehungsfläche

$$13) \qquad -\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

letztere heisst das getheilte Rotationshyperboloid, weil sie aus zwei getrennten Stücken besteht.

Für eine Parabel, deren Achse mit der Drehungsachse und deren Scheitel mit dem Coordinatenanfang zusammenfällt, hat man

$$x_0 = \sqrt{2kz_0}, \qquad y_0 = 0,$$

wobei k den Halbparameter der Parabel bezeichnet; die entsprechende Umdrehungsfläche hat zur Gleichung

$$14) \qquad x^2 + y^2 = 2kz$$

und heisst das Rotationsparaboloid. Giebt man der Parabel die umgekehrte Lage, so dass ihre Achse mit der x-Achse zusammenfällt, so findet sich

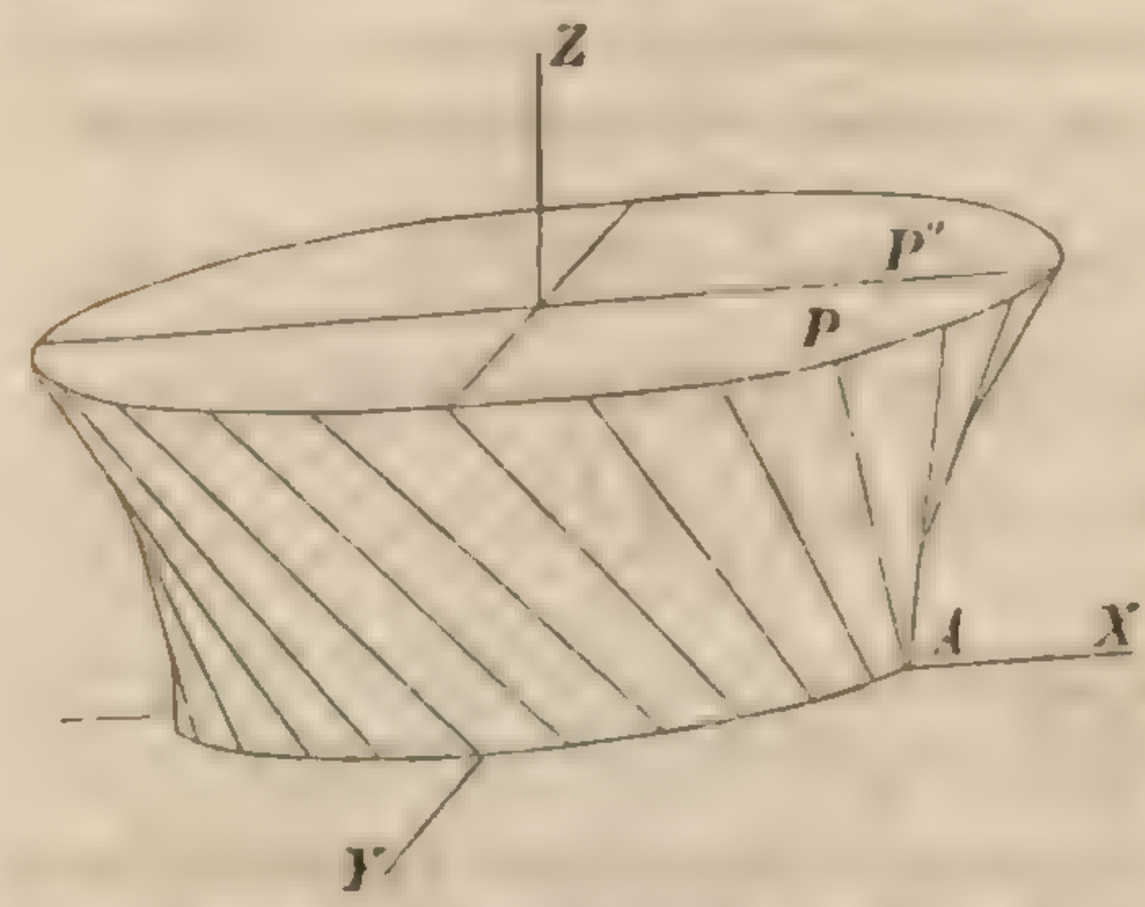
$$z_0 = \sqrt{2kx_0} \text{ oder } x_0 = \frac{z_0^2}{2k}, \qquad y_0 = 0,$$

und

$$x^2 + y^2 = \frac{z^4}{4k^2}.$$

Während die Gleichungen der vorigen Umdrehungsflächen von demselben (zweiten) Grade waren, wie die ihrer Meridiancurven, findet bei der letzten Fläche diese Uebereinstimmung nicht mehr statt; sie führt deshalb keinen besonderen Namen.

Fig. 27.



Um ein Beispiel für den Fall zu haben, wo die rotirende Curve nicht in einer Ebene mit der Drehungsachse liegt, denken wir uns von zwei sich kreuzenden Geraden die eine um die andere herumgedreht. Die feste Gerade sei wieder die z-Achse, die kürzeste Entfernung beider Geraden, in der ursprünglichen Lage der letzteren genommen, sei der Richtung nach zusammenfallend mit der x-Achse und der Grösse

nach $= a$, endlich heisse γ der constante Neigungswinkel PAP' $= 90^0 - \angle PAP''$ der beweglichen Geraden gegen die xy-Ebene. Die Gleichungen der rotirenden Geraden sind jetzt bei deren primitiver Lage

$$x_0 = a, \qquad y_0 = z_0 \cot \gamma,$$

mithin lautet die Gleichung der erzeugten Fläche

$$x^2 + y^2 = a^2 + z^2 \cot^2 \gamma,$$

oder besser

$$15) \qquad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{(a \tan \gamma)^2} = 1.$$

Der Vergleich mit Nr. 12) führt zu dem bemerkenswerthen Resultate, dass die entstandene Umdrehungsfläche ein einfaches Rotationshyperboloid ist, welches die kürzeste Entfernung a beider Geraden zur Hauptthalbachse und $a \tan \gamma$ zur Nebenachse hat. Daraus folgt auch umgekehrt, dass sich auf jedem einfachen Rotationshyperboloide unendlich viel gerade Linien ziehen lassen; jede solche Gerade steht senkrecht auf irgend einem Halbmesser des kleinsten Parallelkreises und ist gegen die Ebene des letzteren um einen Winkel γ geneigt, der sich durch die Formel $\tan \gamma = \frac{c}{a}$ bestimmt.

§. 33.

Schnitte, Berührungsebenen und Normalen der Rotationsflächen.

I. Das Verfahren zur Bestimmung des Durchschnittes einer Umdrehungsfläche mit einer Ebene oder beliebigen anderen Fläche ist im Allgemeinen das nämliche, wie bei den schon besprochenen Gattungen von Flächen; eliminirt man nämlich aus den Gleichungen der sich schneidenden Flächen das eine Mal z, das andere Mal y, so erhält man im ersten Falle die Gleichung der xy-Projection, im anderen Falle die Gleichung der xz-Projection des Durchschnittes. Bei einem ebenen Schnitte kann auch eine Transformation der Coordinaten vorgenommen werden, welche die Gleichung des Durchschnittes selber kennen lehrt. Ein Paar nicht zu gewöhnliche Beispiele hierzu sind folgende.

Durchschnitt einer Kugel mit einem elliptischen Kegel. Beschreibt man aus dem Mittelpunkte eines elliptischen oder schiefen Kreiskegels eine Kugelfläche, so ist der Durchschnitt

beider Flächen ein sogenannter sphärischer Kegelschnitt (sphärische Ellipse), für dessen Punkte die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ und } x^2 \cot^2\alpha + y^2 \cot^2\beta - z^2 = 0$$

zusammen gelten (Nr. 11 in §. 32 und Nr. 3 in §. 30). Als Gleichung der Horizontalprojection findet sich hieraus

$$\frac{x^2}{(r \sin\alpha)^2} + \frac{y^2}{(r \sin\beta)^2} = 1;$$

letztere ist folglich eine Ellipse mit den Halbachsen $a' = r \sin\alpha$ und $b' = r \sin\beta$. Die Verticalprojection hat zur Gleichung

$$\frac{x^2}{\frac{r^2 \cot^2\beta}{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}} + \frac{z^2}{(r \cos\beta)^2} = 1,$$

und ist, $\alpha > \beta$ vorausgesetzt, eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a'' = \frac{r \cot\beta}{\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}}, \qquad c'' = r \cos\beta.$$

Die Projection auf die Ebene yz bestimmt sich durch die Gleichung

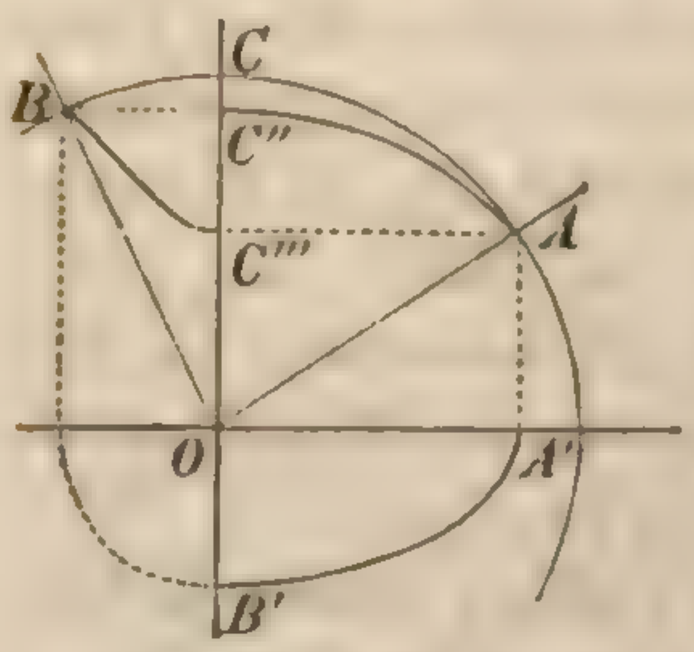
$$-\frac{y^2}{\frac{r^2 \cot^2\alpha}{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}} + \frac{z^2}{(r \cos\alpha)^2} = 1,$$

und ist eine Hyperbel, deren Hauptachse $c''' = r \cos\alpha$ in der Richtung der z liegt und deren Nebenhalbachse

$$b''' = \frac{r \cot\alpha}{\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}}$$

ist. In der Figur sind die drei Projectionsebenen auf die in §. 2 erwähnte Weise aus einander gelegt; OA und OB sind die Verticalspuren des elliptischen Kegels, welche mit der z-Achse die Winkel $AOC = \alpha$ und $BOC = \beta$ bilden, OC ist der Kugelhalbmesser, $OA' = a'$, $OB' = b'$, $OC'' = c''$, $OC''' = c'''$; die in der Figur nicht angegebenen Halbachsen a'' und b''' finden sich leicht aus der Bemerkung, dass die Verticalellipse durch den Punkt A und die Hyperbel durch den Punkt B gehen muss.

Fig. 28.



Durchschnitt eines Rotationsparaboloides und eines elliptischen Kegels. Unter der Voraussetzung, dass die Achsen beider Flächen zusammenfallen, sind die Gleichungen der letzteren

$$x^2 + y^2 = 2kz, \qquad x^2 \cot^2\alpha + y^2 \cot^2\beta = z^2.$$

Die Horizontalprojection des Durchschnittes hat die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = (2k \cot\alpha)^2 x^2 + (2k \cot\beta)^2 y^2$$

und ist die sogenannte Fusspunktencurve einer aus den Halbachsen $a' = 2k \cot\alpha$, $b' = 2k \cot\beta$ construirten Ellipse. Als Gleichung der Verticalprojection des Durchschnittes ergiebt sich

$$(\cot^2\beta - \cot^2\alpha)\, x^2 + (z - k \cot^2\beta)^2 = k^2 \cot^4\beta;$$

sie bedeutet eine Ellipse, deren Halbachsen

$$a'' = \frac{k \cot^2\beta}{\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}}, \qquad c'' = k \cot^2\beta$$

sind und deren Mittelpunkt in der Höhe $k \cot^2\beta$ über dem Coordinatenanfange auf der z-Achse liegt. Die Gleichung der seitlichen Verticalprojection lautet

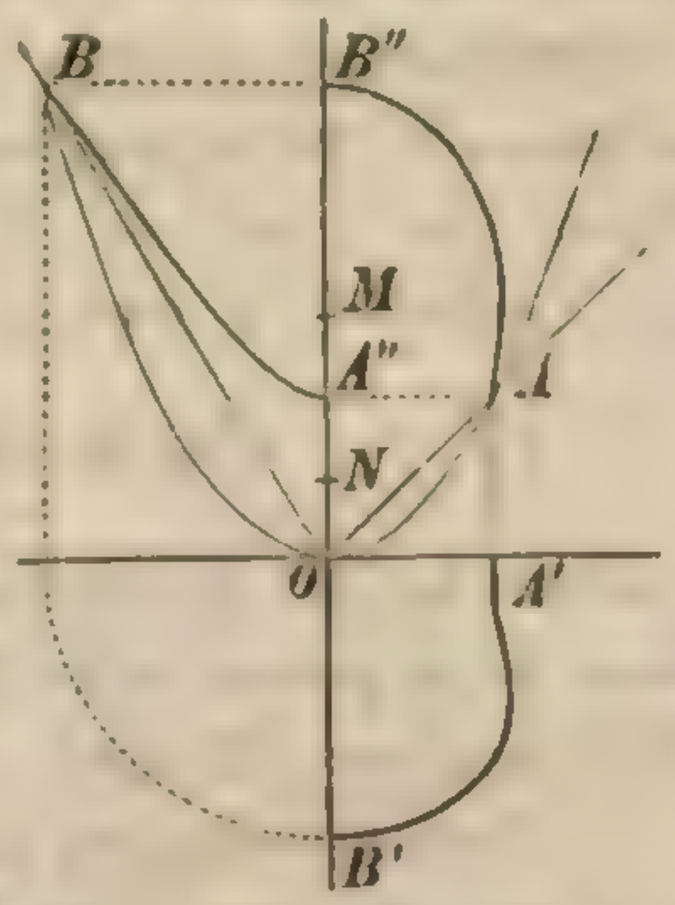
$$(z - k \cot^2\alpha)^2 - (\cot^2\beta - \cot^2\alpha)\, y^2 = k^2 \cot^4\alpha;$$

ihr entspricht eine aus den Halbachsen

$$c''' = k \cot^2\alpha, \qquad b''' = \frac{k \cot^2\alpha}{\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}}$$

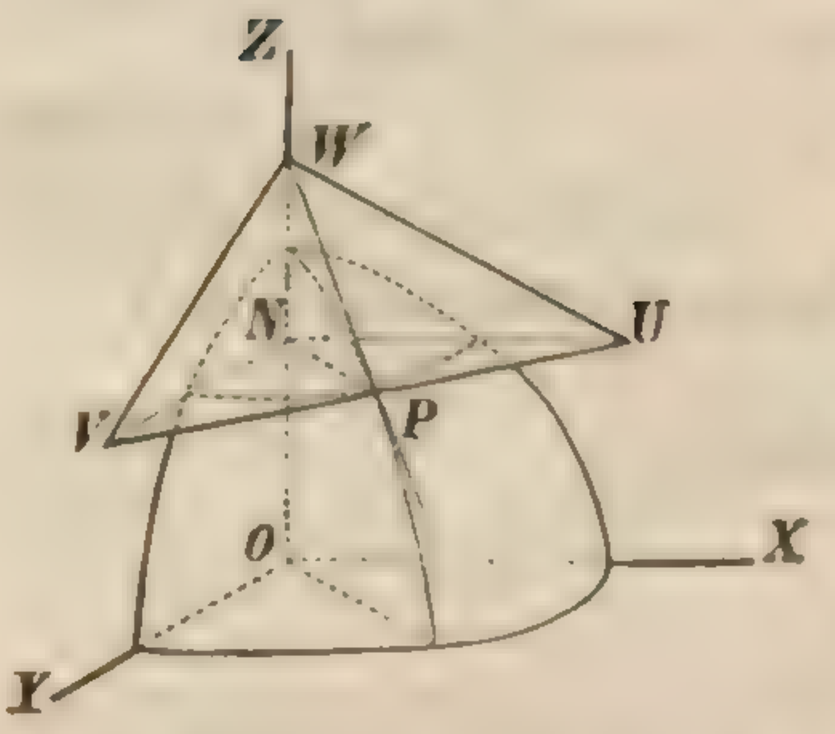
construirte Hyperbel, deren Mittelpunkt in der Höhe $k \cot^2\alpha$ über dem Coordinatenanfange auf der z-Achse liegt. In der Figur ist $OA' = a'$, $OB' = b'$, $OB'' = 2c''$ und der Mittelpunkt M dieser Linie der Mittelpunkt der Verticalellipse; die Haupthalbachse a'' der lezteren lässt sich leicht mittelst der Bemerkung finden, dass die Ellipse durch den Punkt A geht. Ferner ist $OA'' = 2c'''$ und die Mitte N dieser Linie der Mittelpunkt der Hyperbel; die Nebenhalbachse der letzteren kann leicht aus a'' hergeleitet werden. Man wird übrigens, wenn es auf eine Zeichnung ankommt, am zweckmässigsten zuerst die beiden Verticalprojectionen construiren und aus diesen die Horizontalprojection ableiten.

Fig. 29.



II. Legt man durch einen gegebenen Punkt P einer Rotationsfläche einen Parallelkreis und einen Meridian, construirt man ferner die beiden Geraden, welche jene zwei ebenen Curven in P berühren, und legt endlich durch diese sich schneidenden Tangenten eine Ebene, so heisst letztere eine Berührungsebene der Fläche und P ihr Berührungspunkt. Ihre Gleichung wird am

Fig. 30.



kürzesten auf folgende Weise gefunden. Der Mittelpunkt des durch P gelegten Parallelkreises sei N, sein Halbmesser ist dann $NP = \sqrt{x^2+y^2}$, und wenn man in P an den Kreis eine Tangente legt, so schneidet letztere die Ebene xz in einem Punkte U, dessen Coordinaten

$$\frac{x^2+y^2}{x},\quad 0,\quad z$$

sind; dieselbe Tangente schneidet die yz-Ebene in einem durch die Coordinaten

$$0,\quad \frac{x^2+y^2}{y},\quad z$$

bestimmten Punkte V. Ferner sei ONP der durch den Punkt P geführte Meridianschnitt, PW die im Punkte P an den Meridian gelegte Tangente und $OW = t$ das von letzterer auf der z-Achse abgeschnittene Stück; die Strecke t ist immer bekannt und aus der bekannten Meridiangleichung leicht zu finden. Legen wir nun durch den Punkt W, dessen Coordinaten $0, 0, t$ sind, und durch die Punkte U, V eine Ebene, so finden wir als Gleichung derselben

$$1)\qquad x\xi + y\eta + \frac{x^2+y^2}{t-z}\zeta = \frac{x^2+y^2}{t-z}t;$$

hiermit ist die Berührungsebene im Punkte xyz soweit bestimmt, dass es in jedem individuellen Falle nur noch der Substitution des Werthes von t bedarf.

Hieraus ergeben sich auch die Gleichungen der den Verticalprojectionen einer im Punkte xyz auf der Berührungsebene errichteten Senkrechten, nämlich

$$2)\quad \xi - x = \frac{x(t-z)}{x^2+y^2}(\zeta - z),\qquad \eta - y = \frac{y(t-z)}{x^2+y^2}(\zeta - z);$$

dies sind die Gleichungen der Normalen im Punkte xyz.

Als Beispiel diene das Rotationsellipsoid; jeder Meridian desselben ist eine aus den Halbachsen a und c construirte Ellipse, und nach einem bekannten Satze schneidet die Tangente im Punkte P von der z-Achse die Strecke $t = \frac{c^2}{z}$ ab. Hieraus folgt

$$\frac{x^2+y^2}{l-z} = \frac{x^2+y^2}{c^2-z^2}\, z$$

oder vermöge der Gleichung der Fläche (Nr. 10 in §. 32)

$$\frac{x^2+y^2}{l-z} = \frac{a^2}{c^2}\, z;$$

demnach lautet die Gleichung der Berührungsebene

$$x\xi + y\eta + \frac{a^2}{c^2}\, z\zeta = a^2$$

oder in besserer Form

3) $$\frac{x}{a^2}\,\xi + \frac{y}{a^2}\,\eta + \frac{z}{c^2}\,\zeta = 1.$$

Die Gleichungen der Normale sind

4) $$\xi - x = \frac{c^2 x}{a^2 z}(\zeta - z), \qquad \eta - y = \frac{c^2 y}{a^2 z}(\zeta - z).$$

Wir unterlassen die weitere Ausführung dieser Betrachtungen, weil die hauptsächlichsten der vorhin erwähnten Rotationsflächen nur specielle Fälle von allgemeineren Flächen sind, mit deren Untersuchung sich die nächsten Capitel beschäftigen.

Achtes Capitel.

Die Flächen zweiten Grades.

---

§. 34.

Discussion der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades.

In den drei letzten Capiteln kamen mehrere Flächen vor, deren Gleichungen vom zweiten Grade sind, doch blieb dabei unentschieden, ob mit jenen Flächen die ganze Reihe der möglichen Flächen zweiten Grades bereits erschöpft ist oder nicht; das Letztere würde namentlich dann der Fall sein, wenn Flächen zweiten Grades existiren sollten, die weder Cylinder-, noch Kegel-, noch Umdrehungsflächen sind. Um hierüber zu entscheiden, betrachten wir die allgemeinste Gleichung zweiten Grades zwischen drei Coordinaten, nämlich

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0,$$

und untersuchen, welche verschiedenen Flächen dieselbe repräsentirt. Wir werden dabei im Allgemeinen denselben Weg einschlagen, den die analytische Geometrie bei der Discussion der Gleichung zweiten Grades zwischen zwei Coordinaten zu befolgen pflegt.

Aus der Lehre von der Transformation der Coordinaten ist bekannt, dass der Grad einer Flächengleichung bei dem Uebergange zu einem neuen Coordinatensysteme ungeändert bleibt; wäre demnach die Gleichung 1) auf ein beliebiges schiefwinkliges Coordinatensystem bezogen, so würde man diesem ein rechtwinkliges System der $x'y'z'$ substituiren können und eine neue Gleichung von der Form

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2D'x'y' + 2E'x'z' + 2F'y'z' + 2G'x' + 2H'y' + 2I'z' + K' = 0$$

erhalten. Letztere ist von ganz ähnlicher Zusammensetzung, wie die ursprüngliche Gleichung, wir brauchen daher unsere Discussion vorläufig nur auf den Fall zu beziehen, wo das zu Grunde liegende Coordinatensystem ein rechtwinkliges ist.

Irgend einen Punkt xyz der zu untersuchenden Fläche zweiten Grades verbinden wir mit einem beliebig im Raume gewählten Punkte $\xi\eta\zeta$ durch eine Gerade und bezeichnen mit r die Entfernung der Punkte xyz und $\xi\eta\zeta$, ferner durch α, β, γ die Winkel, welche r mit den senkrecht auf einander stehenden Coordinatenachsen der x, y und z bildet; für die Coordinaten x, y, z haben wir nun einerseits, weil der Punkt xyz auf der erwähnten Fläche liegt,

$$1)\quad \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ \qquad + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0, \end{array} \right.$$

andererseits, weil der Punkt xyz zu der Geraden r gehört,

$$2)\quad x = r\cos\alpha + \xi;\quad y = r\cos\beta + \eta,\quad z = r\cos\gamma + \zeta.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung 1) erhält letztere die Form

$$3)\qquad sr^2 + 2mr + n = 0,$$

wobei s, m, n zur Abkürzung für folgende Ausdrücke dienen

$$s = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + 2D\cos\alpha\cos\beta + 2E\cos\alpha\cos\gamma + 2F\cos\beta\cos\gamma$$

oder auch bei etwas anderer Anordnung

$$4)\quad \left\{ \begin{array}{l} s = (A\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma)\cos\alpha \\ \quad + (D\cos\alpha + B\cos\beta + F\cos\gamma)\cos\beta \\ \quad + (E\cos\alpha + F\cos\beta + C\cos\gamma)\cos\gamma, \end{array} \right.$$

$$5)\quad \left\{ \begin{array}{l} m = (A\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma)\xi \\ \quad + (D\cos\alpha + B\cos\beta + F\cos\gamma)\eta \\ \quad + (E\cos\alpha + F\cos\beta + C\cos\gamma)\zeta \\ \quad + G\cos\alpha + H\cos\beta + I\cos\gamma, \end{array} \right.$$

$$6)\quad \left\{ \begin{array}{l} n = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 \\ \quad + 2D\xi\eta + 2E\xi\zeta + 2F\eta\zeta \\ \quad + 2G\xi + 2H\eta + 2I\zeta + K. \end{array} \right.$$

Betrachtet man ξ, η, ζ und α, β, γ als gegebene Grössen, d. h. geometrisch, denkt man sich durch den Punkt $\xi\eta\zeta$ eine Gerade in bestimmter Richtung gezogen, so sind die Werthe von s, m und n

bekannt, unbekannt dagegen r, x, y, z, d. h. diejenigen Grössen, welche den Durchschnitt jener Geraden mit der Fläche bestimmen; in diesem Falle führt die Gleichung 3) zur Kenntniss von r und nachher geben die Gleichungen 2) die Coordinaten des Durchschnittes. Die Beachtung des Umstandes, dass die Gleichung 3) eine quadratische ist, mithin höchstens zwei reelle Wurzeln besitzt, liefert nun augenblicklich den Fundamentalsatz: **eine gerade Linie kann mit einer Fläche zweiten Grades nicht mehr als zwei Punkte gemein haben.**

Die erwähnten Werthe von r sind

$$r = \frac{-m + \sqrt{m^2 - ns}}{s} \text{ und } r_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - ns}}{s};$$

sie fallen reell und verschieden aus, wenn $m^2 - ns$ positiv ist, die Gerade schneidet dann die Fläche in zwei Punkten, deren Verbindungslinie eine Sehne der Fläche bildet; für $m^2 - ns = 0$ folgt $r_1 = r$, die Sehne wird dann zu Null und die Gerade zur Tangente an der Fläche; ist endlich $m^2 - ns$ negativ, so liegt die Gerade ausserhalb der Fläche, ohne einen Punkt mit der letzteren gemein zu haben.

Ausser den genannten Hauptfällen bedarf noch ein specieller Fall näherer Untersuchung. Verbindet man zwei beliebige Punkte xyz und $x_1 y_1 z_1$ der Fläche durch eine Gerade und wählt auf letzterer den Punkt $\xi\eta\zeta$ willkürlich, so lassen sich daraus α, β, γ mittelst der Formeln

$$\cos\alpha = \frac{x - x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y - y_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z - z_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

ableiten und dann erhalten s, m, n von selbst solche Werthe, dass r und r_1 reell ausfallen; dies vorausgesetzt, kann man auch beurtheilen, welchen Werth m annehmen wird, wenn man den Punkt $\xi\eta\zeta$ auf die Mitte der Sehne legt. In diesem Falle sind nämlich r und r_1 gleich gross, aber von entgegengesetzten Vorzeichen und es muss folglich die für r angegebene Gleichung eine rein quadratische, d. h. $m = 0$ sein. Führen wir zur Abkürzung die Bezeichnungen ein

$$7)\quad \begin{cases} a = A\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma, \\ b = D\cos\alpha + B\cos\beta + F\cos\gamma, \\ c = E\cos\alpha + F\cos\beta + C\cos\gamma, \\ d = G\cos\alpha + H\cos\beta + I\cos\gamma, \end{cases}$$

so ist, vermöge des Werthes von m,

$$8)\quad a\xi + b\eta + c\zeta + d = 0$$

die Bedingung dafür, dass der Punkt $\xi\eta\zeta$ auf der Mitte der in der Richtung $\alpha\beta\gamma$ gezogenen Sehne liegt.

Lassen wir die einmal bestimmten Werthe von α, β, γ ungeändert, während ξ, η, ζ sich ändern, so erhalten wir eine Schaar paralleler Sehnen und deren Mittelpunkte; für die Coordinaten der letzteren gilt fortwährend die Gleichung 3), sie repräsentirt also den geometrischen Ort jener Punkte. Letzterer ist aber, wie man unmittelbar bemerkt, eine Ebene und man kann daher den wichtigen Satz aussprechen: die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen einer Fläche zweiten Grades liegen in einer Ebene. Jede derartige Ebene mag eine Diametralebene der Fläche heissen.

Aus den Richtungswinkeln α, β, γ der parallelen Sehnen ergeben sich unmittelbar die Stellungswinkel der zugehörigen Diametralebene, wenn man die Formeln 18) in §. 14 auf die Gleichung 8) anwendet, wobei jene Stellungswinkel kurz mit α', β', γ' bezeichnet werden mögen; man erhält

$$9)\quad \begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \\ \cos\beta' = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \\ \cos\gamma' = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \end{cases}$$

Ferner lässt sich der Neigungswinkel ω der parallelen Sehnen gegen ihre Diametralebene bestimmen; er ist nämlich das Complement des Winkels, welchen die parallelen Sehnen mit einer auf der Diametralebene errichteten Senkrechten einschliessen; zufolge dieser Bemerkung hat man

$$\cos(90^0 - \omega) = \sin\omega$$
$$= \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

d. i.

$$\sin\omega = \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

oder noch einfacher, wenn man sich an die Gleichungen 7) und 4) erinnert,

$$10) \qquad \sin\omega = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Von besonderem Interesse ist hier die Frage, ob die Richtung der parallelen Sehnen so gewählt werden könnte, dass die zugehörige Diametralebene senkrecht auf den Sehnen steht (man begreift im Voraus, dass eine solche Diametralebene sich besonders gut zu einer neuen Coordinatenebene eignen müsste), was unter den Bedingungen

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = s$$
$$\alpha' = \alpha, \qquad \beta' = \beta, \qquad \gamma' = \gamma$$

der Fall sein würde. Durch Substitution dieser Werthe verwandeln sich die Gleichungen 9) in die folgenden

$$11) \qquad \cos\alpha = \frac{a}{s}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{s}, \qquad \cos\gamma = \frac{c}{s},$$

oder wegen $s = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma$

$$12) \quad \begin{cases} (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\cos\alpha = a, \\ (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\cos\beta = b, \\ (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\cos\gamma = c. \end{cases}$$

Denkt man sich die Werthe von a, b, c eingesetzt, so enthalten die vorstehenden drei Gleichungen die drei Unbekannten α, β, γ, welche ausserdem noch an die vierte Bedingung

$$13) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

gebunden sind. Gleichwohl ist das Problem der Bestimmung von α, β, γ desswegen noch nicht unmöglich, denn man kann sich auf folgende Weise überzeugen, dass die dritte der Gleichungen 12) eine blose Consequenz der beiden vorhergehenden und mithin überflüssig ist. Multiplicirt man die erste der Gleichungen 12) mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\cos\beta$ und addirt, so wird

$$(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = a\cos\alpha + b\cos\beta;$$

hier braucht man nur $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$ durch $1 - \cos^2\gamma$ zu ersetzen, um nach gehöriger Hebung sofort die dritte Gleichung in 12) zu erhalten. Wollte man nun die Gleichungen 12) und 13) auf gewöhnliche Weise als drei Gleichungen mit drei Unbekannten ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) behandeln, so würde die Elimination von zweien der letzteren auf eine sehr complicirte Gleichung von hohem Grade führen, es ist daher besser, die obigen Gleichungen so zu betrachten, als ob sie vier Unbekannte, nämlich α, β, γ, s, enthielten, und

vor der Hand s zu entwickeln, woraus sich nachher α, β, γ leicht ableiten lassen.

Setzt man die Werthe von a, b, c in die Gleichungen 11) ein und vereinigt nach Wegschaffung der Brüche die gleichartigen Grössen, so gelangt man zu den folgenden drei Gleichungen

$$(A-s)\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma = 0,$$
$$D\cos\alpha + (B-s)\cos\beta + F\cos\gamma = 0,$$
$$E\cos\alpha + F\cos\beta + (C-s)\cos\gamma = 0;$$

die erste Gleichung dividiren wir durch DE und addiren beiderseits $\frac{\cos\alpha}{F}$; dies giebt

$$\frac{\cos\alpha}{F} + \frac{\cos\beta}{E} + \frac{\cos\gamma}{D} = \frac{\cos\alpha}{DE}\left(s - A + \frac{DE}{F}\right);$$

aus der zweiten Gleichung ziehen wir durch Division mit DF und Addition von $\frac{\cos\beta}{E}$:

$$\frac{\cos\alpha}{F} + \frac{\cos\beta}{E} + \frac{\cos\gamma}{D} = \frac{\cos\beta}{DF}\left(s - B + \frac{DF}{E}\right),$$

und durch ein ähnliches Verfahren aus der dritten Gleichung

$$\frac{\cos\alpha}{F} + \frac{\cos\beta}{E} + \frac{\cos\gamma}{D} = \frac{\cos\gamma}{EF}\left(s - C + \frac{EF}{D}\right).$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$14)\quad \begin{cases} L = A - \frac{DE}{F}, \quad M = B - \frac{DF}{E}, \quad N = C - \frac{EF}{D}, \\ S = \frac{\cos\alpha}{F} + \frac{\cos\beta}{E} + \frac{\cos\gamma}{D}, \end{cases}$$

wo L, M, N bekannte Grössen sind, S dagegen unbekannt ist; wir haben jetzt nach dem Vorigen

$$15)\quad S = \frac{\cos\alpha}{DE}(s-L),\ S = \frac{\cos\beta}{DF}(s-M),\ S = \frac{\cos\gamma}{EF}(s-N)$$

oder

$$16)\quad \cos\alpha = \frac{DES}{s-L},\quad \cos\beta = \frac{DFS}{s-M},\quad \cos\gamma = \frac{EFS}{s-N}.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich zwei andere bilden, welche unmittelbar die Auflösung unseres Problemes liefern; man erhält nämlich einerseits, wenn man die obigen Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in die Formel 13) einsetzt und die entstehende Gleichung auf S reducirt,

$$17)\quad S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{DE}{s-L}\right)^2 + \left(\frac{DF}{s-M}\right)^2 + \left(\frac{EF}{s-N}\right)^2}};$$

dividirt man ferner die erste der Gleichungen 16) durch F, die zweite durch E, die dritte durch D und addirt die Quotienten, so ergiebt sich auf der linken Seite wieder S und es ist demnach

$$S = \frac{DE}{F}\frac{S}{s-L} + \frac{DF}{E}\frac{S}{s-M} + \frac{EF}{D}\frac{S}{s-N}$$

oder

$$18)\quad S\left(1 - \frac{DE}{F}\frac{1}{s-L} - \frac{DF}{E}\frac{1}{s-M} - \frac{EF}{D}\frac{1}{s-N}\right) = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt sowohl durch $S = 0$, als durch

$$19)\quad 1 - \frac{DE}{F}\frac{1}{s-L} - \frac{DF}{E}\frac{1}{s-M} - \frac{EF}{D}\frac{1}{s-N} = 0;$$

im ersten Falle müsste nach Nr. 15) entweder $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 0$ sein, was der Gleichung 13) widerspricht, oder es müsste gleichzeitig $s = L$, $s = M$, $s = N$ werden, was nur unter der besonderen Voraussetzung, dass L, M, N gleiche Werthe haben, geschehen könnte; versparen wir einstweilen die Untersuchung dieses Specialfalles, so ist im Allgemeinen S von Null verschieden, mithin bleibt noch die Bedingung 19) zu erfüllen. Diese enthält die einzige Unbekannte s; hat man deren Werth durch Auflösung der Gleichung ermittelt, so findet sich S aus Formel 17), nachher dienen die Gleichungen 16) zur Bestimmung der Winkel α, β, γ. Man erkennt hieraus, dass die Frage nach der Möglichkeit einer senkrechten Lage der parallelen Sehnen gegen die ihnen entsprechende Diametralebene in letzter Instanz auf die Frage nach den reellen Wurzeln der Gleichung 19) zurückkommt; letztere bedarf deshalb einer genaueren Untersuchung.

§. 35.

Fortsetzung.

Durch Multiplication mit dem Producte der Differenzen $s - L$, $s - M$ und $s - N$ erhält die Gleichung 18) die Form

$$(s-L)(s-M)(s-N) - \frac{DE}{F}(s-M)(s-N)$$
$$- \frac{DF}{E}(s-L)(s-N) - \frac{EF}{D}(s-L)(s-M) = 0\ ^*)$$

und nach Division mit DEF

---

*) Führt man die angedeuteten Multiplicationen aus und setzt nachher die für L, M, N angegebenen Werthe ein, so kann man die obige Gleichung auch in die folgende verwandeln

$$20)\quad \left\{ \frac{(s-L)(s-M)(s-N)}{DEF} - \frac{(s-L)(s-M)}{D^2} - \frac{(s-L)(s-N)}{E^2} - \frac{(s-M)(s-N)}{F^2} = 0. \right.$$

Diese Gleichung ist vom dritten Grade, und da jede cubische Gleichung mindestens eine reelle Wurzel besitzt, so folgt daraus, dass es in jeder Fläche zweiten Grades wenigstens eine Schaar paralleler Sehnen giebt, die von ihrer zugehörigen Diametralebene normal halbirt werden. Um aber zu entscheiden, ob die beiden übrigen Wurzeln reell oder imaginär sind, betrachten wir die Gleichung

$$21)\quad \left\{ \frac{(s-L)(s-M)(s-N)}{DEF} - \frac{(s-L)(s-M)}{D^2} - \frac{(s-L)(s-N)}{E^2} - \frac{(s-M)(s-N)}{F^2} = t, \right.$$

denken uns darin s und t als veränderliche Grössen und fragen, wie viel es reelle Werthe von s giebt, für welche t verschwindet. Diese Frage lässt sich auch unter einen geometrischen Gesichtspunkt bringen, wenn man s als Abscisse, t als Ordinate eines Punktes in der Ebene und die Gleichung 21) als Gleichung einer ebenen krummen Linie betrachtet; man hat dann zu untersuchen, wie viele Punkte diese Curve (eine Parabel dritten Grades) mit der Abscissenachse gemein hat. Dies geschieht auf folgende Weise.

Das Product DEF kann eben so wohl positiv, als negativ sein, im ersten Falle möge dessen reciproker Werth mit $+ \varkappa$, im zweiten Falle mit $- \varkappa$ bezeichnet werden, so dass $\varkappa$ in beiden Fällen den absoluten Werth von $\frac{1}{DEF}$ ausdrückt. Die Grössen L, M, N sind im Allgemeinen von einander verschieden, es giebt also unter ihnen eine kleinste, eine mittlere und eine grösste, und um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, dass $L < M < N$, mithin jede der Differenzen $L - M$, $L - N$, $M - N$ negativ sei; diese Voraussetzung beeinträchtigt übrigens die All-

---

$$(s-A)(s-B)(s-C) - D^2(s-C) - E^2(s-B) - F^2(s-A) - 2DEF = 0.$$

Diese einfache Form der ursprünglichen Gleichung würde in dem Falle bequem sein, wo es sich bei numerisch gegebenen A, B, ... F um den Zahlenwerth von s handelte, dagegen gestattet sie keine so leichte Entscheidung der Frage nach der Anzahl der reellen Wurzeln.

gemeinheit der Untersuchung nicht, denn man wird bald bemerken, dass die nachherigen Erörterungen ganz gleichförmig auf jede andere Rangordnung der Grössen L, M, N passen. Der Gleichung 20) geben wir zunächst die Form

22)
$$t = (s-L)(s-M)(s-N)\left\{\pm\varkappa - \frac{1}{D^2(s-N)} - \frac{1}{E^2(s-M)} - \frac{1}{F^2(s-L)}\right\}$$

und denken uns s als unendlich wachsende negative Zahl; die Quotienten

$$\frac{1}{s-L}, \quad \frac{1}{s-M}, \quad \frac{1}{s-N}$$

haben in diesem Falle die Null zur Grenze, und das Product

$$(s-L)(s-M)(s-N)$$

erhält einen unendlich wachsenden, aber negativen Werth, weil bei hinreichend grossen negativen s jeder einzelne Factor desselben negativ wird. Wir drücken dies kurz durch die Formel aus:

für $s = -\infty$ wird $t = (-\infty)(\pm\varkappa) = \mp\infty$.

Nehmen wir zweitens $s = L$, so giebt die Gleichung 21) unmittelbar

$$t = -\frac{(L-M)(L-N)}{F^2}$$

d. h., wenn man sich an das über die Differenzen $L-M$ und $L-N$ Gesagte erinnert,

für $s = L$ wird t negativ.

Daran schliessen sich ferner die Bemerkungen

für $s = M$ wird $t = -\frac{(M-L)(M-N)}{E^2}$ d. h. positiv,

„ $s = N$ „ $t = -\frac{(N-L)(N-M)}{D^2}$ d. h. negativ.

Wir denken uns zuletzt s als unendlich wachsende positive Zahl und benutzen dabei wieder die Form 22); auch in diesem Falle haben die dort erwähnten Quotienten die Null zur Grenze, dagegen wächst das Product $(s-L)(s-M)(s-N)$ ins positiv Unendliche, d. h.

für $s = +\infty$ wird $t = (+\infty)(\pm\varkappa) = \pm\infty$.

Nach diesen Ergebnissen kann man sich leicht ein Bild von dem Verlaufe der in Rede stehenden Curve entwerfen; für ein positives DEF hat sie die in Fig. 31 angedeutete Gestalt, für ein

negatives DEF entspricht sie der Fig. 32; in beiden Darstellungen sind L, M, N die Endpunkte der Abscissen $s = L$, $s = M$, $s = N$, wobei man sich den Anfangspunkt der Coordinaten an beliebiger Stelle auf der Achse der s denken kann. Aus dem Anblick dieser Figuren (oder, wenn man will, aus bekannten algebraischen Sätzen) geht nun hervor, dass es jedenfalls drei Punkte P_1, P_2, P_3 giebt, in denen die Curve die Abscissenachse schneidet; nennen wir s_1, s_2, s_3 die Abscissen von P_1, P_2, P_3, so haben wir drei verschiedene Werthe von s, für welche $t = 0$ wird, d. h. drei reelle Wurzeln der Gleichung 20). Für ein positives DEF liegt die kleinste Wurzel zwischen L und M, die folgende zwischen M und N, die dritte zwischen N und $+\infty$; bei negativen DEF ist die kleinste Wurzel zwischen $-\infty$ und L, die mittlere zwischen L und M, die grösste zwischen M und N enthalten.

Fig. 31.

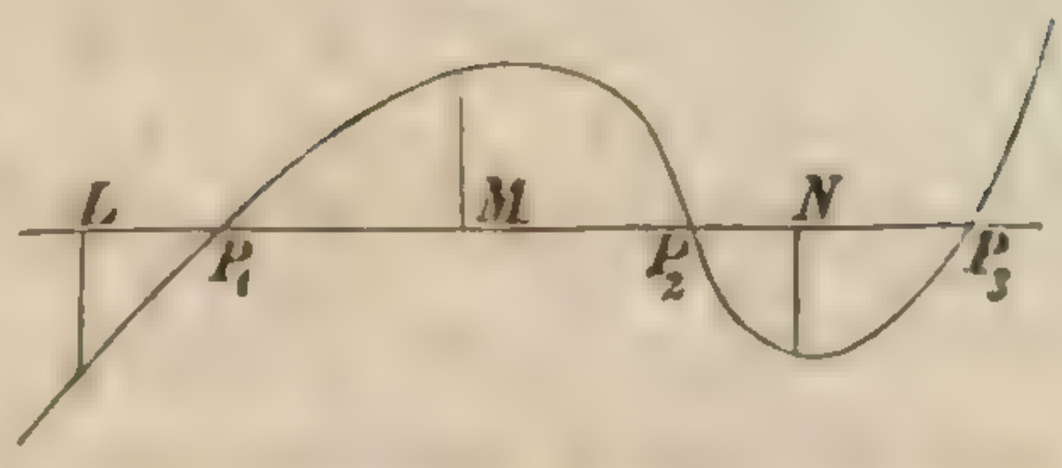
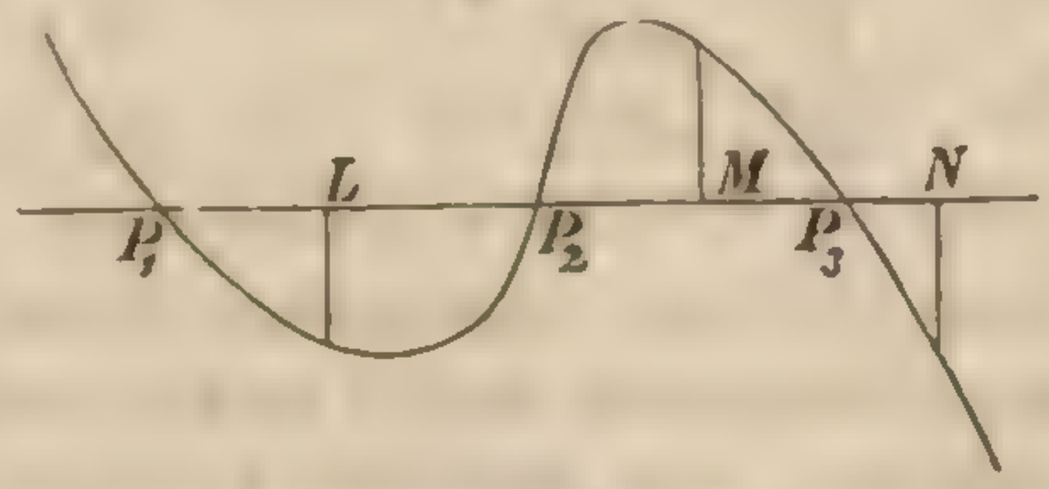


Fig. 32.



Den drei verschiedenen Werthen $s = s_1$, $s = s_2$, $s = s_3$ entsprechen nach Formel 17) drei verschiedene Werthe von S, die wir der Reihe nach mit S_1, S_2, S_3 bezeichnen wollen; diese liefern nach Nr. 16) drei verschiedene Richtungen der parallelen Sehnen und zwar mögen die betreffenden Richtungswinkel durch α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 unterschieden werden. Wir haben daher den Satz: **Für jede Fläche zweiten Grades lassen sich im Allgemeinen drei Hauptrichtungen angeben, bei welchen die parallelen Sehnen von den zugehörigen Diametralebenen normal halbirt werden. Jede derartige Diametralebene mag eine Hauptebene der Fläche heissen.**

Bevor wir die gegenseitige Lage der Hauptebenen untersuchen, entwickeln wir erst einige Relationen zwischen den drei Wurzeln der Gleichung 20). Da s_1, s_2, s_3 die genannte Gleichung erfüllen, so genügen sie auch der nicht wesentlich davon verschiedenen Gleichung 18); **es ist also gleichzeitig**

$$\frac{DE}{F}\frac{1}{s_1-L}+\frac{DF}{E}\frac{1}{s_1-M}+\frac{EF}{D}\frac{1}{s_1-N}=1,$$
$$\frac{DE}{F}\frac{1}{s_2-L}+\frac{DF}{E}\frac{1}{s_2-M}+\frac{EF}{D}\frac{1}{s_2-N}=1,$$
$$\frac{DE}{F}\frac{1}{s_3-L}+\frac{DF}{E}\frac{1}{s_3-M}+\frac{EF}{D}\frac{1}{s_3-N}=1.$$

Durch Subtraction der zweiten von der ersten Gleichung und nachherige Multiplication mit DEF folgt

$$(s_2-s_1)\left\{\frac{D^2E^2}{(s_1-L)(s_2-L)}+\frac{D^2F^2}{(s_1-M)(s_2-M)}+\frac{E^2F^2}{(s_1-N)(s_2-N)}\right\}=0,$$

da s_2-s_1 von Null verschieden ist, so muss der Inhalt der Parenthese $=0$ sein; auf analoge Weise kann man die erste der vorigen Gleichungen mit der dritten, sowie die zweite mit der dritten verbinden, was zusammen die folgenden Beziehungen giebt:

$$23)\quad\begin{cases}\dfrac{D^2E^2}{(s_1-L)(s_2-L)}+\dfrac{D^2F^2}{(s_1-M)(s_2-M)}+\dfrac{E^2F^2}{(s_1-N)(s_2-N)}=0,\\ \dfrac{D^2E^2}{(s_1-L)(s_3-L)}+\dfrac{D^2F^2}{(s_1-M)(s_3-M)}+\dfrac{E^2F^2}{(s_1-N)(s_3-N)}=0,\\ \dfrac{D^2E^2}{(s_2-L)(s_3-L)}+\dfrac{D^2F^2}{(s_2-M)(s_3-M)}+\dfrac{E^2F^2}{(s_2-N)(s_3-N)}=0.\end{cases}$$

Die Winkel, welche die Hauptrichtungen mit den Achsen einschliessen, bestimmen sich Nr. 16), nämlich

$$\cos\alpha_1=\frac{DES_1}{s_1-L},\quad \cos\beta_1=\frac{DFS_1}{s_1-M},\quad \cos\gamma_1=\frac{EFS_1}{s_1-N},$$
$$\cos\alpha_2=\frac{DES_2}{s_2-L},\quad \cos\beta_2=\frac{DFS_2}{s_2-M},\quad \cos\gamma_2=\frac{EFS_2}{s_2-N},$$
$$\cos\alpha_3=\frac{DES_3}{s_3-L},\quad \cos\beta_3=\frac{DFS_3}{s_3-M},\quad \cos\gamma_3=\frac{EFS_3}{s_3-N},$$

und daraus sind die Winkel zwischen den Hauptrichtungen selber leicht abzuleiten. Bezeichnen wir die gesuchten Winkel mit (r_1r_2), (r_1r_3), (r_2r_3), so ist

$$\cos(r_1r_2)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2,$$
$$\cos(r_1r_3)=\cos\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\beta_1\cos\beta_3+\cos\gamma_1\cos\gamma_3,$$
$$\cos(r_2r_3)=\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3;$$

nach Substitution der angegebenen Cosinuswerthe vereinfachen sich diese Ausdrücke sehr, sobald man die Gleichungen 23) beachtet; es bleibt nämlich

$$\cos(r_1r_2)=0,\qquad \cos(r_1r_3)=0,\qquad \cos(r_2r_3)=0,$$

d. h.

$$\angle(r_1r_2)=\angle(r_1r_3)=\angle(r_2r_3)=90^0.$$

Daraus folgt augenblicklich der schöne Satz: die drei Hauptebenen einer Fläche zweiten Grades stehen senkrecht auf einander.

Die vorige Untersuchung, die wir bisher völlig allgemein gehalten haben, kann in speciellen Fällen, namentlich wenn mehrere der Grössen $A, B, C, D \ldots K, L, M, N$ einander gleich werden, einige Modificationen erleiden; so verdient z. B. der Fall $L = M = N$ besondere Aufmerksamkeit. Vermöge der Bedeutung von L, M, N ist dann

$$A = M + \frac{DE}{F}, \qquad B = M + \frac{DF}{E}, \qquad C = M + \frac{EF}{D},$$

mithin nach Nr. 7)

$$a = \left(M + \frac{DE}{F}\right) \cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma$$

$$= M\cos\alpha + DE\left(\frac{\cos\alpha}{F} + \frac{\cos\beta}{E} + \frac{\cos\gamma}{D}\right);$$

für die eingeklammerte Summe schreiben wir, wie früher, S und entwickeln auf gleiche Weise b und c; dies giebt

$$a = M\cos\alpha + DES, \quad b = M\cos\beta + DFS, \quad c = M\cos\gamma + EFS;$$

$$s = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma$$
$$= M(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$
$$+ S(DE\cos\alpha + DF\cos\beta + EF\cos\gamma)$$
$$= M + DEFS^2.$$

Von den aufzulösenden drei Gleichungen

$$(A - s)\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma = 0,$$
$$D\cos\alpha + (B - s)\cos\beta + F\cos\gamma = 0,$$
$$E\cos\alpha + F\cos\beta + (C - s)\cos\gamma = 0,$$

verwandelt sich die erste nach Substitution der Werthe von A und s in

$$\left(\frac{DE}{F} - DEFS^2\right)\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma = 0$$

oder durch Division mit DE

$$\frac{\cos\alpha}{F} + \frac{\cos\beta}{E} + \frac{\cos\gamma}{D} - FS^2\cos\alpha = 0$$

d. i.

$$S - FS^2\cos\alpha = 0.$$

Behandelt man die übrigen Gleichungen auf dieselbe Weise, so hat man überhaupt folgende Relationen

$$(1 - FS\cos\alpha)S = 0, \quad (1 - ES\cos\beta)S = 0, \quad (1 - DS\cos\gamma)S = 0;$$

diesen Gleichungen kann man auf zweierlei Weise genügen, entweder durch

$$24) \qquad \cos\alpha = \frac{1}{FS}, \quad \cos\beta = \frac{1}{ES}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{DS},$$

oder durch

$$25) \qquad S = 0.$$

Aus den Gleichungen 24) ergiebt sich, indem man quadrirt und addirt

$$1 = \left(\frac{1}{F^2} + \frac{1}{E^2} + \frac{1}{D^2}\right)\frac{1}{S^2}$$

oder

$$26) \qquad S = \frac{\sqrt{D^2E^2 + D^2F^2 + E^2F^2}}{DEF},$$

wodurch S, mithin nach Nr. 24) auch α, β, γ gefunden sind. Diese Auflösung stimmt mit derjenigen überein, welche die Formeln 18), 17) und 16) liefern, wenn man beachtet, dass die Gleichung 18) für $L = M = N$ nur vom ersten Grade ist. Ausserdem genügen der Aufgabe auch alle die Winkel, für welche die Gleichung 25) besteht; zum Unterschiede von den vorigen Winkeln mögen dieselben mit α', β', γ' bezeichnet werden, es gilt dann für sie die Gleichung

$$\frac{\cos\alpha'}{F} + \frac{\cos\beta'}{E} + \frac{\cos\gamma'}{D} = 0.$$

Diese Bedingung kann auf unendlich viele Arten befriedigt werden, und zwar ist dieselbe wegen

$$\frac{1}{F} = S\cos\alpha, \qquad \frac{1}{E} = S\cos\beta, \qquad \frac{1}{D} = S\cos\gamma,$$

einerlei mit

$$S(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') = 0.$$

Da S nicht verschwindet, so muss der Parentheseninhalt gleich Null sein und es folgt daraus, dass nicht nur die zuerst bestimmte Richtung $\alpha\beta\gamma$, sondern auch jede darauf senkrechte Richtung $\alpha'\beta'\gamma'$ eine Hauptrichtung ist. Dieser besondere Fall tritt übrigens bei Rotationsflächen zweiten Grades ein, wie wir kurz zeigen wollen. Ist

$$q^2 = 2hp + kp^2$$

die Scheitelgleichung eines Meridians für die rechtwinkligen Coordinaten p und q, sind ferner λ, μ, ν die Richtungswinkel der Drehungsachse, so lautet nach §. 32 die Gleichung der Rotationsfläche

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$
$$=[(x-a)\cos\lambda+(y-b)\cos\mu+(z-c)\cos\nu]^2$$
$$+2h[(x-a)\cos\lambda+(y-b)\cos\mu+(z-c)\cos\nu]$$
$$+k[(x-a)\cos\lambda+(y-b)\cos\mu+(z-c)\cos\nu]^2$$

und nachdem man sie auf die normale Form einer Flächenglei chung zweiten Grades gebracht hat, ist

$$A=(1+k)\cos^2\lambda-1,$$
$$B=(1+k)\cos^2\mu-1,$$
$$C=(1+k)\cos^2\nu-1,$$
$$D=(1+k)\cos\lambda\cos\mu,$$
$$E=(1+k)\cos\lambda\cos\nu,$$
$$F=(1+k)\cos\mu\cos\nu.$$

In der That hat man vermöge dieser Werthe

$$A-\frac{DE}{F}=B-\frac{DF}{E}=C-\frac{EF}{D}=-1$$

d. h.

$$L=M=N;$$

ferner ergiebt sich mittelst der Formeln 26) und 24)

$$\cos\alpha=\cos\lambda,\qquad\cos\beta=\cos\mu,\qquad\cos\gamma=\cos\nu;$$

wie vorauszusehen war, ist hier die Richtung der Drehungsachse die erste Hauptrichtung, ausserdem sind noch alle zu letzterer senkrechten Richtungen gleichfalls Hauptrichtungen, was geometrisch unmittelbar erhellt.

Wäre endlich noch specieller $A=B=C$ und $D=E=F=0$, so würden a, b, c die Werthe

$$a=A\cos\alpha,\qquad b=A\cos\beta,\qquad c=A\cos\gamma$$

erhalten, woraus weiter folgt

$$s=A=B=C.$$

Die Gleichungen

$$(A-s)\cos\alpha+D\cos\beta+E\cos\gamma=0,$$
$$D\cos\alpha+(B-s)\cos\beta+F\cos\gamma=0,$$
$$E\cos\alpha+F\cos\beta+(C-s)\cos\gamma=0,$$

werden jetzt von allen beliebigen α, β, γ erfüllt, d. h. jede Richtung kann als Hauptrichtung angesehen werden. Dieser Fall tritt bei der Kugelfläche ein, deren allgemeine Gleichung

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

durch Auflösung der Quadrate und Multiplication mit einem beliebigen Factor A leicht auf die vorausgesetzte Form zu bringen ist.

§. 36.

Schluss.

Nachdem wir die Ueberzeugung gewonnen haben, dass für jede Fläche zweiten Grades drei auf einander senkrechte Hauptebenen angegeben werden können, liegt es sehr nahe, dieselben zu Coordinatenebenen zu wählen. Dabei ist aber ein Umstand zu beachten; die Realität jener Ebenen schliesst die Möglichkeit nicht aus, dass ihr Durchschnittspunkt ins Unendliche falle und man kann daher nicht ohne Weiteres den Durchschnitt aller drei Hauptebenen zum Coordinatenanfang machen*). Wir nehmen daher einstweilen nur zwei Hauptebenen zu Coordinatenebenen und legen den Coordinatenanfang beliebig auf den geradlinigen Durchschnitt derselben, so dass die dritte Coordinatenebene der dritten Hauptebene parallel liegt. Ist nun in dem neuen rechtwinkligen Coordinatensysteme, dessen Coordinaten x', y', z' heissen mögen, die Ebene $y'z'$ eine Hauptebene, so muss jeder in dieser Ebene liegende Punkt $y'z'$ der Mittelpunkt einer darauf senkrechten (zur x'-Achse) parallelen Sehne sein, d. h. jedem Coordinatenpaare $y'z'$ müssen zwei gleich grosse und dem Zeichen nach entgegengesetzte x' entsprechen. Hieraus folgt, dass die transformirte Gleichung, welche die Form

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2D'x'y' + 2E'x'z' + 2F'y'z' + 2G'x' + 2H'y' + 2I'z' + K' = 0$$

besitzen würde, rein quadratisch in Beziehung auf x' sein muss; sie lautet daher

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2F'y'z' + 2H'y' + 2I'z' + K' = 0.$$

Ist zweitens die Coordinatenebene $x'z'$ eine Hauptebene, so entsprechen jedem willkürlich gewählten Coordinatenpaare $x'z'$ zwei gleiche und entgegengesetzte y', es verschwinden daher auch die Coefficienten aller mit der ersten Potenz von y' behafteten Glieder, d. h. die Gleichung jeder Fläche zweiten Grades kann auf die Form

$$27) \qquad A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2I'z' + K' = 0$$

gebracht werden.

---

*) In der analytischen Geometrie der Ebene kommt ein ähnlicher Fall vor. Die Parabel besitzt nämlich so, wie die Ellipse und die Hyperbel, zwei auf einander senkrechte Hauptdiameter, deren Durchschnitt (der Mittelpunkt der Curve) im Unendlichen liegt und eben desswegen nicht zum Coordinatenanfang taugt.

Eine weitere Vereinfachung entsteht dadurch, dass man den Anfangspunkt der Coordinaten auf der z-Achse um die Strecke $\frac{I'}{C'}$ verschiebt; setzt man nämlich

$$x' = x'', \qquad y' = y'', \qquad z' = z'' - \frac{I'}{C'},$$

so verwandelt sich die obige Gleichung in

$$28) \qquad A'x''^2 + B'y''^2 + C'z''^2 + \frac{I''^2}{C'} + K' = 0,$$

wobei man die beiden unveränderlichen Grössen zusammen mit einem einzigen Buchstaben bezeichnen könnte.

Die soeben ausgeführte Verschiebung des Coordinatenanfangs ist in dem Falle $C' = 0$ unthunlich, weil dann $\frac{I'}{C'}$ entweder unendlich oder keine bestimmte Grösse wäre; für diesen Fall, in welchem also statt Nr. 27)

$$29) \qquad A'x'^2 + B'y'^2 + 2I'z' + K' = 0$$

zu schreiben ist, dient eine andere durch die Substitutionen

$$x' = x'', \qquad y' = y'', \qquad z' = z'' - \frac{K'}{2I'}$$

angezeigte Coordinatenänderung; sie giebt

$$30) \qquad A'x''^2 + B'y''^2 + 2I'z'' = 0.$$

Auch diese Transformation ist unausführbar für $I' = 0$; man hätte dann statt der Gleichung 29)

$$A'x'^2 + B'y'^2 + K' = 0,$$

wodurch eine gerade Cylinderfläche charakterisirt wird; da übrigens die vorstehende Form bereits in der Form 28) enthalten ist, so giebt sie keine Veranlassung zu einer neuen Umwandlung. Bei Unterdrückung der nicht mehr nöthigen Accente haben wir nun folgendes Theorem: Wenn man zwei Hauptebenen einer Fläche zweiten Grades zu den Coordinatenebenen der xz und yz nimmt, so lässt sich die Gleichung der Fläche auf die eine oder andere der beiden Formen

$$31) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = K$$

$$32) \qquad Ax^2 + By^2 = 2Iz$$

zurückführen; die Flächen zweiten Grades zerfallen daher in zwei verschiedene Arten, jenachdem ihre Gleichungen der einen oder der anderen Form angehören.

Den geometrischen Unterschied zwischen beiden Gattungen von Flächen erkennt man auf folgende Weise. Zieht man durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine ganz beliebige Gerade, deren Richtungswinkel φ, ψ, χ heissen mögen, so gelten für jeden Punkt xyz derselben die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\cos\psi, \qquad z = r\cos\chi$$

durch deren Substitution in Nr. 31) der Radiusvector r des Durchschnittes von der Geraden mit der Fläche bestimmt wird; die resultirende Gleichung ist eine rein quadratische und giebt folglich zwei gleich grosse und entgegengesetzte Werthe von r. Demnach halbirt der Anfangspunkt der Coordinaten alle durch ihn gelegten Sehnen der Fläche, ist also der Mittelpunkt der Fläche und zugleich der Durchschnitt der Hauptebenen, weil die Gleichung 31) auch in Beziehung auf z rein quadratisch ist. Umgekehrt verhält es sich mit der Gleichung 32); dass hier der Coordinatenanfang nicht der Mittelpunkt der Fläche ist, erkennt man augenblicklich aus der quadratischen Gleichung für r, in welcher der Coefficient von r nicht verschwindet; dass aber auch kein anderer Punkt uvw den Mittelpunkt bildet, zeigt die allgemeinere Substitution

$$x = u + r\cos\varphi, \quad y = v + r\cos\psi, \quad z = w + r\cos\chi.$$

Diese führt zur Gleichung

$$(A\cos^2\varphi + B\cos^2\psi)\,r^2 + 2\,(Au\cos\varphi + Bv\cos\psi - I\cos\chi)\,r + Au^2 + Bv^2 - 2Iw = 0$$

und hier müsste für alle φ, ψ, χ

$$Au\cos\varphi + Bv\cos\psi - I\cos\chi = 0$$

sein, was aus naheliegenden Gründen unmöglich ist.

Ferner ist für die zweite Gattung von Flächen die Ebene xy keine Hauptebene, letztere liegt vielmehr in unendlicher Entfernung von dieser, wie sich gleich ergiebt, wenn man eine Schaar von Sehnen parallel zur z-Achse legt. Die erste Art von Flächen zweiten Grades umfasst demnach die centralen Flächen, die zweite die nichtcentralen Flächen.

Endlich würde noch zu entscheiden sein, wie viel individuelle Flächen zweiten Grades in jeder einzelnen Gattung enthalten sind; hierzu bedarf es nur einer Untersuchung über die verschiedenen möglichen Vorzeichen, welche die Grössen A, B, C, D, K, I in den Gleichungen 31) und 32) haben können.

a. Unter der Voraussetzung, dass keine der Grössen A, B, C, K verschwindet, können wir die Gleichung 31) durch K dividiren und es sei dann

$$\frac{A}{K} = \pm \frac{1}{a^2}, \qquad \frac{B}{K} = \pm \frac{1}{b^2}, \qquad \frac{C}{K} = \pm \frac{1}{c^2};$$

bilden wir nun alle möglichen Combinationen der Vorzeichen, so entstehen folgende acht Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad +\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Diesen entsprechen aber nicht acht verschiedene Flächen, namentlich sind die Flächen ihrer Natur nach identisch, deren Gleichungen in einer Gruppe beisammen stehen. Schreibt man z. B. in der zweiten Gleichung derjenigen Gruppe, welche zwei positive Zeichen neben einem negativen enthält, x_1, z_1, y_1 für x, y, z und a_1, c_1, b_1 für a, b, c, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{z_1^2}{c_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1$$

und wird dadurch identisch mit der ersten Gleichung derselben Gruppe; beide Flächen unterscheiden sich daher nicht der Art sondern nur der Lage nach, und auf gleiche Weise kann die Gleichheit der übrigen in einer Gruppe befindlichen Flächen nachgewiesen werden. Ausserdem ist noch zu beachten, dass die letzte der vorigen Gleichungen keinen geometrischen Sinn hat, weil die Summe mehrerer negativen Zahlen nicht $= +1$ sein kann. Demnach bleiben nur die drei Gleichungen

33)
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ -\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \end{cases}$$

als Repräsentanten von drei wirklich verschiedenen Flächen übrig. Ist zweitens $K = 0$, so setzen wir

$$A = \pm \frac{1}{a^2}, \qquad B = \pm \frac{1}{b^2}, \qquad C = \pm \frac{1}{c^2}$$

und erhalten durch Combination der Vorzeichen die Formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Die beiden Gleichungen der ersten Gruppe sind identisch (wie die blose Multiplication mit -1 zeigt) und repräsentiren keine Fläche, sondern nur einen Punkt, weil ihnen auf keine andere Weise als durch $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ genügt werden kann. Die beiden Gleichungen der zweiten Gruppe charakterisiren gleichfalls eine und dieselbe Fläche, nämlich den elliptischen Kegel. Uebrigens ist diese Fläche implicite bereits in der zweiten Gleichung von Nr. 33) enthalten; setzt man nämlich in letzterer $a = \delta a'$, $b = \delta b'$, $c = \delta c'$, so wird

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = \delta^2$$

und hieraus wird für $\delta = 0$ die Gleichung der Kegelfläche.

Wenn nicht K, aber einer der Coefficienten B, C, etwa C verschwindet, so repräsentirt die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 = K$$

im Allgemeinen eine Cylinderfläche, deren erzeugende Gerade der z-Achse parallel ist. Die nämliche Gleichung erscheint auch als specieller Fall einer der Gleichungen 33), wenn man c (oder b oder a) unendlich gross werden lässt. Für $K = 0$ wird daraus entweder ein blosser Punkt (bei gleichen Vorzeichen von A und B) oder ein Complex von zwei zur z-Achse parallelen sich schneidenden Ebenen (bei entgegengesetzten Vorzeichen von A und B). Verschwinden zwei der Coefficienten A, B, C, etwa die beiden ersten, so repräsentirt die Gleichung

$$Cz^2 = K$$

bei positiven $\frac{K}{C}$ zwei zur xy-Ebene parallele Ebenen, die für $K = 0$ zusammenfallen, für ein negatives $\frac{K}{C}$ hört die Gleichung auf, geometrisch bedeutsam zu sein.

c. Um in ähnlicher Weise die Flächen zweiter Art zu discutiren, setzen wir zunächst voraus, dass keine der Grössen A, B, I verschwinde; nach Division mit I sei

$$\frac{A}{I} = \pm\frac{1}{a}, \qquad \frac{B}{I} = \pm\frac{1}{b},$$

und jede der Grössen a und b an sich positiv. Die Combination der Vorzeichen liefert folgende vier Gleichungen

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z, \qquad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z,$$

$$-\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z, \qquad -\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z.$$

Hier können wiederum die in einer Gruppe beisammen stehenden Gleichungen zur Identität gebracht werden und zwar dadurch, dass man der z-Achse die entgegengesetzte Lage giebt, d. h. $z = -z'$ setzt; demnach bleiben nur die zwei durch die Gleichungen

$$34) \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} = 2z, \\ \dfrac{x^2}{a} - \dfrac{y^2}{b} = 2z, \end{cases}$$

repräsentirten Flächen als reell verschiedene übrig.

Für $I = 0$ reducirt sich die Gleichung 32) auf

$$Ax^2 + By^2 = 0,$$

wovon die geometrische Bedeutung bereits angegeben wurde. Verschwindet einer der Coefficienten A und B, etwa der letztere, so repräsentirt die Gleichung

$$Ax^2 = 2Iz$$

einen parabolischen Cylinder, dessen erzeugende Gerade der y-Achse parallel ist; für $I = 0$ degenerirt derselbe zur yz-Ebene, für $A = 0$ zur xy-Ebene.

Schliessen wir nun alle die speciellen Fälle aus, in denen eine Fläche zweiten Grades zu einem Kegel, Cylinder oder zu einem ebenen Gebilde wird, so haben wir als Gesammtresultat der ganzen Discussion den Satz: die Flächen zweiten Grades zerfallen in fünf besondere Flächen, von denen drei einen Mittelpunkt und die übrigen keinen Mittelpunkt besitzen.

Wir untersuchen jetzt diese individuellen Flächen der Reihe nach einzeln.

§. 37.

Das Ellipsoid.

Die erste von den centralen Flächen zweiten Grades wird nach Nr. 33) durch die Gleichung

$$1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

charakterisirt, mittelst deren man leicht Auskunft über ihre Gestalt erlangen kann. Um zunächst die Spuren oder sogenannten Hauptschnitte der Fläche kennen zu lernen, setzen wir der Reihe nach $z=0$, $y=0$, $x=0$, und erhalten dem entsprechend

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

diese Gleichungen geben zu erkennen, dass alle drei Hauptschnitte Ellipsen sind, und zwar besitzt der Schnitt mit der xy-Ebene die Halbachsen a und b, der xz-Schnitt die Halbachsen a und c, endlich der yz-Schnitt die Halbachsen b und c. Legt man ferner in der Höhe h über der xy-Ebene eine zu dieser parallele Ebene, d. h. nimmt man z unveränderlich $=h$, so schneidet letztere Ebene die Fläche in einer Linie, welche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1$$

oder

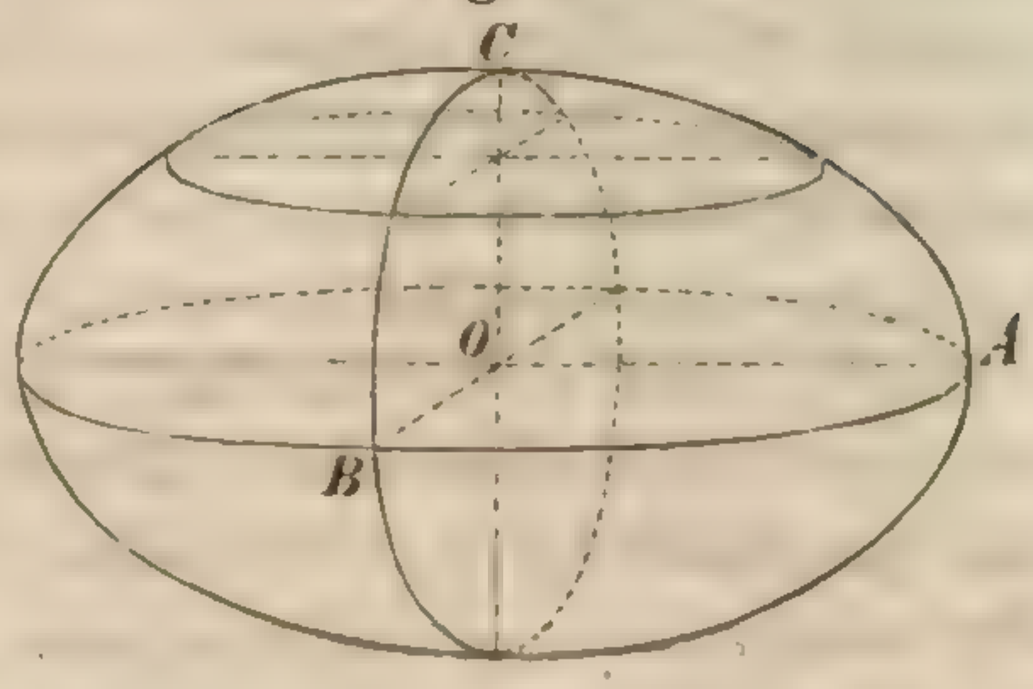
$$\left(\frac{x}{\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}}\right)^2=1$$

zur Gleichung hat; der Durchschnitt ist folglich eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2} \quad \text{und} \quad \frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}.$$

Ihre grössten Werthe erhalten dieselben für $h=0$, bei wachsenden h nehmen sie ab, reduciren sich für $h=c$ auf Null (in welchem Falle der Querschnitt zu einem Punkte wird) und werden endlich imaginär für $h>c$. Man kann sich demnach die Fläche durch die Peripherie einer veränderlichen Ellipse erzeugt denken, wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und gleichzeitig ihre Scheitel auf zwei festen Ellipsen fortrücken, deren eine in der xz-Ebene aus den Halbachsen $OA=a$, $OC=c$, und deren andere in der yz-Ebene aus den Halbachsen $OB=b$, $OC=c$

Fig. 33.



construirt ist. Die Linien a, b, c nennt man die Halbachsen der Fläche und letztere ein dreiachsiges Ellipsoid. Für $b = a > c$ verwandelt sich dasselbe in das abgeplattete Rotationsellipsoid mit c als Drehungsachse, für $c = b < a$ in das durch Drehung um die x-Achse entstandene gestreckte Rotationsellipsoid; für $a > b$ und $c = \infty$ geht das dreiachsige Ellipsoid in einen elliptischen Cylinder über, dessen Normalquerschnitt die Halbachsen a und b besitzt.

Eine beliebige Ebene, deren Gleichung

2) $$Ax + By + Cz = D$$

schneidet das Ellipsoid in einer krummen Linie, für welche die Gleichung der Horizontalprojection durch Elimination von z aus den Gleichungen 1) und 2) bestimmt wird; das Resultat dieser leichten Rechnung ist von der Form

3) $$A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2 C_1 x y + 2 D_1 x + 2 E_1 y + F_1 = 0,$$

worin A_1, B_1 ... F_1 folgende Werthe besitzen

$$A_1 = \frac{A^2}{c^2} + \frac{C^2}{a^2}, \qquad B_1 = \frac{B^2}{c^2} + \frac{C^2}{b^2}, \qquad C_1 = \frac{AB}{c^2},$$

$$D_1 = -\frac{AD}{c^2}, \qquad E_1 = -\frac{BD}{c^2}, \qquad F_1 = \frac{D^2}{c^2} - C^2.$$

Dem zufolge ist

$$C_1^2 - A_1 B_1 = -\frac{A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2}{a^2 b^2 c^2} C^2$$

und da der Ausdruck rechter Hand, mithin auch $C_1^2 - A_1 B_1$, jederzeit negativ bleibt, so charakterisirt die Gleichung 3) im Allgemeinen eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Coordinaten

4) $$x_0 = \frac{B_1 D_1 - C_1 E_1}{C_1^2 - A_1 B_1}, \qquad y_0 = \frac{A_1 E_1 - C_1 D_1}{C_1^2 - A_1 B_1}$$

besitzt. Die Halbachsen dieser Ellipse sind nach einem bekannten Satze reell, wenn der Ausdruck

5) $$A_1 E_1^2 + B_1 D_1^2 + (C_1^2 - A_1 B_1) F_1 - 2 C_1 D_1 E_1$$

positiv ist; hat der vorstehende Ausdruck den Werth Null, so verschwinden die Halbachsen der Ellipse und es reducirt sich die Curve auf ihren durch die Gleichungen 4) bestimmten Mittelpunkt;

ist endlich der erwähnte Ausdruck negativ, so werden die Halbachsen der Ellipse imaginär und die Gleichung 3) verliert ihre geometrische Bedeutung. Vermöge der Werthe von $A_1, B_1, C_1 \ldots F_1$ geben die Formeln 4)

$$x_0 = \frac{ADa^2}{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}, \qquad y_0 = \frac{BDb^2}{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}$$

als ebene Coordinaten des Mittelpunktes der Schnittprojection; die Coordinaten des Mittelpunktes der Schnittellipse selber sind die nämlichen x_0, y_0 und das ihnen vermöge der Gleichung 2) entsprechende

$$z_0 = \frac{CDc^2}{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}.$$

Ferner wird der in Nr. 5) verzeichnete Ausdruck gleich dem folgenden

$$\frac{C^4}{a^2b^2c^2}(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 - D^2),$$

dessen Vorzeichen lediglich von dem Inhalte der Parenthese abhängt. Unter Rücksicht auf den Umstand, dass die Schnittcurve immer derselben Natur wie ihre Projection sein muss, haben wir als Gesammtresultat der vorigen Erörterungen den Satz: wenn der Ausdruck

$$6) \qquad \Delta = A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 - D^2$$

einen positiven Werth erhält, so schneidet die Ebene 2) das Ellipsoid 1) in einer Ellipse, deren Mittelpunkt durch die Coordinaten

$$x_0 = \frac{ADa^2}{D^2 + \Delta}, \qquad y_0 = \frac{BDb^2}{D^2 + \Delta}, \qquad z_0 = \frac{CDc^2}{D^2 + \Delta}$$

bestimmt ist; für $\Delta = 0$ hat die Ebene mit der Fläche nur den einen durch die Coordinaten

$$x_0 = \frac{Aa^2}{D}, \qquad y_0 = \frac{Bb^2}{D}, \qquad z_0 = \frac{Cc^2}{D}$$

bestimmten Punkt gemein; bei negativen Δ besitzen beide Flächen keinen gemeinschaftlichen Punkt.

Von Interesse ist noch die Frage, ob es solche Lagen der schneidenden Ebene giebt, dass die entstehenden Schnittellipsen auch bei dem dreiachsigen Ellipsoid zu Kreisen werden, wie dies bei den Rotationsellipsoiden der Fall ist. Um hinsichtlich der Achsenverhältnisse eine bestimmte Vorstellung zu haben, setzen wir $a > b > c$ voraus, worin keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit liegt, weil es jederzeit frei steht, die grösste der Halbachsen zur x-Achse, die mittlere zur y-Achse und die kleinste zur

z-Achse zu wählen. Wir schneiden ferner das Ellipsoid durch eine Ebene, deren Horizontalspur mit der x-Achse den Winkel ψ einschliesst und deren Neigungswinkel gegen die xy-Ebene ϑ heissen möge. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der x-Achse sei der Anfangspunkt eines neuen Coordinatensystems und seine Entfernung vom Mittelpunkte des Ellipsoides $= k$; die Horizontalspur der Ebene nehmen wir zur Achse der x' und senkrecht darauf die Achse der y' in der Ebene selbst. Die Gleichung des Durchschnittes beider Flächen ergiebt sich nun aus Nr. 1) durch Substitution der Werthe (§. 28, Nr. 8)

$$\begin{aligned} x &= k + x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta \\ y &= \quad x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta \\ z &= \quad y' \sin\vartheta \end{aligned}$$

und zwar ist das Resultat von der Form

$$7) \quad A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

worin A', B', C', auf die es nur ankommt, folgende Werthe haben

$$A' = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}, \quad B' = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2},$$

$$C' = \frac{(a^2 - b^2)\cos\psi \sin\psi \cos\vartheta}{a^2 b^2}.$$

Die Gleichung 7) repräsentirt einen Kreis, wenn die Bedingungen $C' = 0$ und $A' = B'$ gleichzeitig erfüllt sind; die erste giebt entweder

$$\cos\vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad \sin\psi = 0 \quad \text{oder} \quad \cos\psi = 0;$$

die zweite Bedingung

$$8) \quad \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2} = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}$$

liefert im Falle $\cos\vartheta = 0$ für $\cos\psi$ den (wegen $b < a$) unmöglichen Werth

$$\cos\psi = \frac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{c\sqrt{b^2 - a^2}};$$

der zweite Fall $\sin\psi = 0$ führt zu dem Ausdrucke

$$\sin\vartheta = \frac{c\sqrt{b^2 - a^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}},$$

welcher gleichfalls imaginär ist; für $\cos\psi = 0$ endlich erhält man aus Nr. 8)

$$9) \quad \sin\vartheta = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 - c^2}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Der rechter Hand stehende Ausdruck ist reell und jederzeit < 1, weil er als Product zweier ächten Brüche dargestellt werden konnte. Die Formel 9) giebt für ϑ zwei verschiedene Werthe, es existiren daher im Allgemeinen zwei verschiedene Systeme paralleler Ebenen, welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden; wegen $\psi = 90^0$ stehen alle derartigen Ebenen senkrecht auf der xz-Ebene, d. h. auf der Ebene der grössten und kleinsten Achse, ihre Gleichungen (oder auch die ihrer xz-Spuren) haben die gemeinschaftliche Form

$$z = (x - k) \tan \vartheta$$

d. h. zufolge des Werthes von $\tan \vartheta$

$$c\sqrt{a^2 - b^2}\,(x - k) \pm a\sqrt{b^2 - c^2}\,.\,z = 0$$

oder

$$10) \quad c\sqrt{a^2 - b^2}\,.\,x \pm a\sqrt{b^2 - c^2}\,.\,z = ck\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Die Schnitte sind reell, so lange

$$\Delta = c^2\left\{a^2(a^2 - c^2) - (a^2 - b^2)\,k^2\right\}$$

positiv ist, d. h. so lange

$$k^2 < \frac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2 - b^2}$$

bleibt; sie werden für

$$k^2 = \frac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2 - b^2}$$

zu Punkten, deren Coordinaten sind:

$$\pm\frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \qquad 0, \qquad \pm\frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}},$$

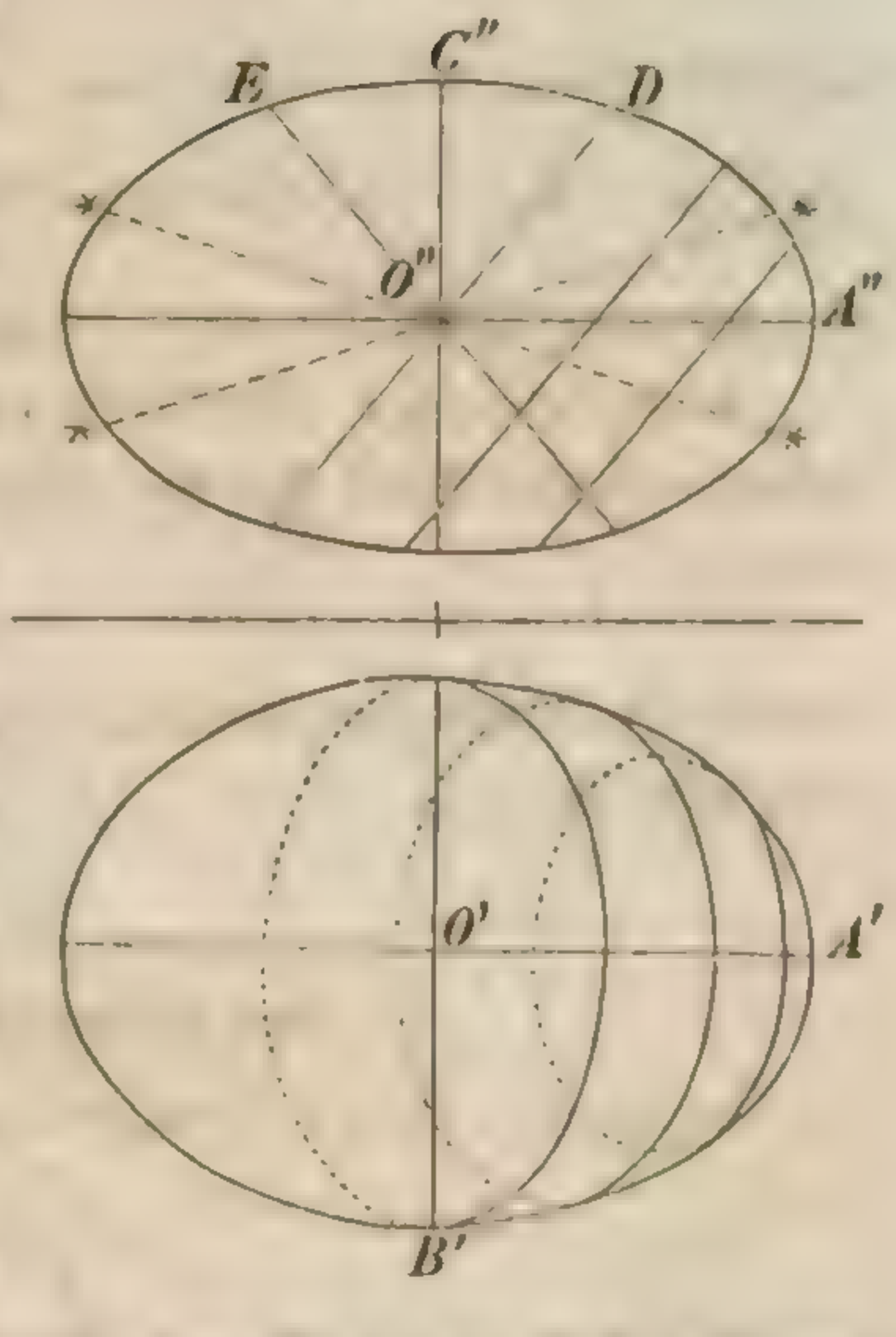
wobei alle Combinationen der Vorzeichen gelten; endlich hören die Kreisschnitte auf, zu existiren, wenn k^2 die angegebene Grösse überschreitet. Die vier erwähnten Punkte, welche als Kreise mit annullirten Halbmessern zu betrachten sind, pflegt man die vier **Kreispunkte des Ellipsoides** zu nennen.

Diese Ergebnisse sind übrigens leicht graphisch darzustellen, wenn man die Fläche auf zwei den Coordinatenebenen xy und xz parallele Ebenen projicirt; in der Horizontalprojection hat man die beiden Halbachsen $O'A' = a$, $O'B' = b$, in der Verticalprojection die Halbachsen $O''A'' = a$, $O''C'' = c$; beschreibt man aus O'' mit b als Halbmesser einen Kreis, welcher die Verticalellipse u. A. in D schneidet, so ist

$$\sin A''O''D = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 - c^2}}$$

mithin ϑ entweder $= \angle A''O''D$ oder gleich dessen Nebenwinkel $A''O''E$. Alle auf der Ebene der Verticalprojection (Bildebene) senkrechten und zu $O''D$ oder $O''E$ parallelen Ebenen schneiden das Ellipsoid in Kreisen (drei derselben sind in der Figur angegeben und erscheinen in der Horizontalprojection als Ellipsen); die Halbmesser der Kreise werden um so kleiner, je weiter sich die Schnitte vom Mittelpunkte der Fläche entfernen, und gehen zuletzt in Null über. Die Mittelpunkte aller erwähnten Kreise liegen auf denjenigen Durchmessern der Verticalellipse, welche entweder zur Sehnenrichtung OD oder zur Richtung OE gehören, die Endpunkte der Durchmesser sind die vier Kreispunkte der Fläche und in der Figur durch Asterisken bezeichnet.

Fig. 34.



Wir betrachten endlich den Fall, wo die Ebene nur einen Punkt mit der Fläche gemein hat, d. h. letztere in diesem Punkte berührt, und lösen die hieran sich knüpfende Aufgabe, „durch einen gegebenen Punkt xyz des Ellipsoides eine Tangentialebene an letzteres zu legen“. Nennen wir

11) $$A\xi + B\eta + C\zeta = D$$

die Gleichung der gesuchten Ebene, so müssen nach dem Vorigen die Bedingungen

$$A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 = D^2,$$

$$x = \frac{Aa^2}{D}, \qquad y = \frac{Bb^2}{D}, \qquad z = \frac{Cc^2}{D}$$

erfüllt sein; aus den letzten Gleichungen folgen die Werthe

$$A = \frac{Dx}{a^2}, \qquad B = \frac{Dy}{b^2}, \qquad C = \frac{Dz}{c^2},$$

welche der ersten Bedingung genügen, weil der Punkt xyz, vermöge der gemachten Voraussetzung, auf der Fläche liegt. Nach Substitution der Werthe von A, B, C erhalten wir aus Nr. 11)

12) $$\frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta = 1$$

als Gleichung der Berührungsebene am Punkte xyz; ihre Spuren schneiden von den Coordinatenachsen die Strecken $\frac{a^2}{x}$, $\frac{b^2}{y}$, $\frac{c^2}{z}$ ab und sind hiernach sehr leicht zu construiren.

Eine auf der Berührungsebene im Berührungspunkte errichtete Senkrechte hat die Gleichungen

13) $$\eta - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(\xi - x), \qquad \zeta - z = \frac{a^2 z}{c^2 x}(\xi - x),$$

womit die durch den Punkt xyz gehende Normale der Fläche bestimmt ist.

§. 38.

Das einfache Hyperboloid.

Setzt man in der Gleichung der zweiten centralen Fläche

1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

der Reihe nach $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, so erhält man als Gleichungen der Spuren oder Hauptschnitte:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

demgemäss ist der Hauptschnitt mit der xy-Ebene eine aus den Halbachsen a und b gebildete Ellipse, die sogenannte Kehlellipse, der xz-Schnitt ist eine Hyperbel, welche a zur Haupt- und c zur Nebenhalbachse hat, der yz-Schnitt ist gleichfalls eine Hyperbel mit der Hauptthalbachse b und der Nebenhalbachse c. Für eine in der Höhe h parallel zur xy-Ebene gelegte Ebene hat z den constanten Werth $z = h$ und es ist folglich die Gleichung ihres Schnittes mit der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 1$$

oder

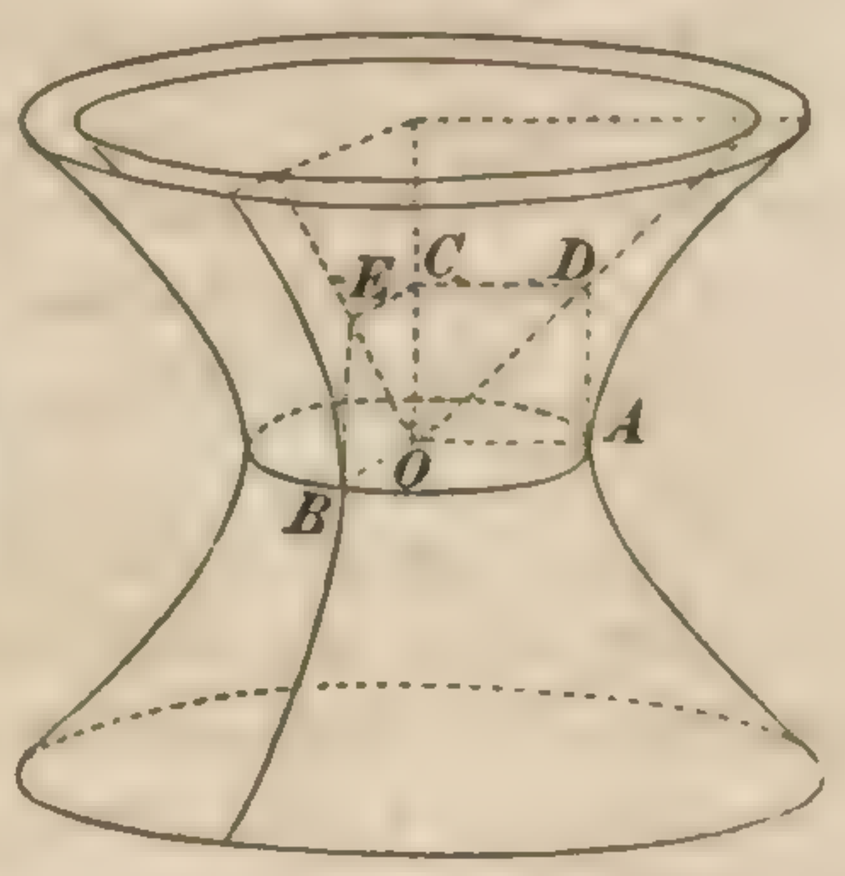
$$\left(\frac{x}{\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}}\right)^2 = 1;$$

der Schnitt ist folglich eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2} \text{ und } \frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}.$$

Letztere erhalten für $h = 0$ ihre kleinsten Werthe und wachsen mit h gleichzeitig ins Unendliche. Demzufolge kann man sich die Fläche durch die Peripherie einer veränderlichen Ellipse erzeugt denken, wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und ihre Scheitel auf zwei festen Hyperbeln fortrücken, deren eine in der xz-Ebene aus den Halbachsen $OA = CD = a$, $OC = AD = c$, und deren andere in der yz-Ebene aus den Halbachsen $OB = CE = b$, $OC = BE = c$ construirt ist, wobei c für beide Hyperbeln als Nebenhalbachse dient. Die Linien a, b, c nennt man die Halbachsen der Fläche und letztere ein dreiachsiges Hyperboloid. Für $b = a$ verwandelt sich dasselbe in das einfache Rotationshyperboloid, für

Fig. 35.



$a > b$ und $c = \infty$ geht es in denselben elliptischen Cylinder über wie unter gleichen Umständen das dreiachsige Ellipsoid. Endlich ist noch die Veränderung zu erwähnen, welche die Fläche in dem Falle erleidet, wo die Asymptotenwinkel $AOD = \alpha'$ und $BOD = \beta'$ constant bleiben aber die Halbachsen bis zu Null vermindert werden; giebt man der Gleichung 1) für diesen Zweck die Form

$$x^2 \tan^2 \alpha' + y^2 \tan^2 \beta' - z^2 = c^2$$

und lässt nachher c in Null übergehen, so bleibt

$$x^2 \tan^2 \alpha' + y^2 \tan^2 \beta' - z^2 = 0$$

als Gleichung der resultirenden Fläche; diese ist ein elliptischer Kegel, wie schon in §. 36, I. bemerkt wurde. Die Gleichung desselben kann auch in der Form

$$2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

dargestellt werden und führt zu einer nahen Beziehung beider Flächen. Der in der Höhe $z = h$ parallel zur xy-Ebene gelegte Querschnitt des Kegels ist eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{ah}{c}$ und $\frac{bh}{c}$, mithin sind die Differenzen zwischen den Halbachsen der durch das Hyperboloid und durch den Kegel in gleicher Höhe gelegten Schnitte

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}-\frac{a}{c}h=\frac{ac}{\sqrt{c^2+h^2}+h},$$
$$\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}-\frac{b}{c}h=\frac{bc}{\sqrt{c^2+h^2}+h};$$

für unendliche wachsende h haben beide Differenzen die Null zur Grenze d. h. je entfernter von der xy-Ebene eine Parallelebene zu dieser gelegt wird, destoweniger differiren die Querschnitte der beiden Flächen von einander. Zufolge dieser Eigenschaft heisst die durch Nr. 2) charakterisirte Fläche der Asymptotenkegel des einfachen Hyperboloides.

Eine beliebige Ebene, deren Gleichung

3) $$Ax+By+Cz=D$$

sein möge, schneidet das Hyperboloid in einer Linie zweiten Grades, für welche die Gleichung der Horizontalprojection durch Elimination von z gefunden wird; sie hat die Form

4) $$A_1x^2+B_1y^2+2C_1xy+2D_1x+2E_1y+F_1=0$$

und zwar ist

$$A_1=-\frac{A^2}{c^2}+\frac{C^2}{a^2},\quad B_1=-\frac{B^2}{c^2}+\frac{C^2}{b^2},\quad C_1=-\frac{AB}{c^2},$$
$$D_1=\frac{AD}{c^2},\quad E_1=\frac{BD}{c^2},\quad F_1=-\frac{D^2}{c^2}-C^2.$$

Hieraus ergeben sich die Werthe

$$C_1^2-A_1B_1=\frac{A^2a^2+B^2b^2-C^2c^2}{a^2b^2c^2}C^2,$$
$$A_1E_1^2+B_1D_1^2+(C_1^2-A_1B_1)F_1-2C_1D_1E_1$$
$$=\frac{-A^2a^2-B^2b^2+C^2c^2+D^2}{a^2b^2c^2}C^4,$$

mittelst deren Vorzeichen bekanntlich die Natur der betreffenden Linie zweiten Grades beurtheilt werden kann. Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden.

Ist $C_1^2-A_1B_1$ negativ also

$$A^2a^2+B^2b^2<C^2c^2,$$

so wird A_1 positiv*) und dasselbe gilt von dem Ausdrucke

$$\Delta=-A^2a^2-B^2b^2+C^2c^2+D^2;$$

die Gleichung 4) bedeutet in diesem Falle eine Ellipse, deren Mittelpunkt durch die Coordinaten

---

*) Diese Bemerkung ist desswegen nicht überflüssig, weil das zweite Unterscheidungszeichen für die Kegelschnitte ein positives A_1 voraussetzt.

$$\frac{A D a^2}{D^2 - \Delta}, \quad \frac{B D b^2}{D^2 - \Delta}$$

bestimmt wird.

Im zweiten Falle $C_1^2 - A_1 B_1 = 0$ oder

$$A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2 c^2$$

ist A_1 wiederum positiv und die Gleichung 4) repräsentirt eine Parabel, wenigstens so lange, als Δ nicht verschwindet d. h. $D \gtrless 0$ ist; für $D = 0$ degenerirt die Parabel zu zwei parallelen Geraden, deren Gleichungen unmittelbar angegeben werden können. Die Gleichung 4) lautet nämlich für $D = 0$

$$\frac{C^2 c^2 - A^2 a^2}{a^2 c^2} x^2 + \frac{C^2 c^2 - B^2 b^2}{b^2 c^2} y^2 - 2 \frac{A B}{c^2} x y - C^2 = 0$$

d. i. wegen der vorher erwähnten Bedingung

$$\frac{B^2 b^2}{a^2 c^2} x^2 + \frac{A^2 a^2}{b^2 c^2} y^2 - 2 \frac{A B}{c^2} x y = C^2$$

oder

$$\left(\frac{B b}{a} x - \frac{A a}{b} y \right)^2 = C^2 c^2$$

woraus

$$\frac{B b}{a} x - \frac{A a}{b} y = \pm C c.$$

Ist endlich drittens $C_1^2 - A_1 B_1$ positiv also

$$A^2 a^2 + B^2 b^2 > C^2 c^2,$$

so bedeutet die Gleichung 4) im Allgemeinen eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Coordinaten

$$\frac{A D a^2}{D^2 - \Delta}, \quad \frac{B D b^2}{D^2 - \Delta}$$

besitzt. Für $\Delta = 0$ reducirt sich dieselbe auf ihre Asymptoten, denn wenn man in Nr. 4) die für diesen Fall gültigen Werthe

$$A_1 = \frac{B^2 b^2 - D^2}{a^2 c^2}, \quad B_1 = \frac{A^2 a^2 - D^2}{b^2 c^2}, \quad F_1 = - \frac{A^2 a^2 + B^2 b^2}{c^2}$$

einsetzt, so erhält man

$$\left(\frac{B b}{a} x - \frac{A a}{b} y \right)^2 - \left(\frac{D}{a} x - A a \right)^2 - \left(\frac{D}{b} y - B b \right)^2 = 0,$$

oder für

$$x = \frac{A a^2}{D} + x_1, \qquad y = \frac{B b^2}{D} + y_1,$$

$$\left(\frac{B b}{a} x_1 - \frac{A a}{b} y_1 \right)^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0;$$

diese Gleichung repräsentirt, wie ihre Reduction auf x, zeigt, zwei Gerade, welche den durch die Coordinaten

$$\frac{Aa^2}{D} \quad \text{und} \quad \frac{Bb^2}{D}$$

bestimmten Punkt gemein haben. Diese Ergebnisse sind leicht auf den Schnitt selber zu übertragen und sehr gut in Worte zu fassen, wenn man den geometrischen Sinn der Unterscheidung $A^2a^2 + B^2b^2 \lessgtr C^2c^2$ berücksichtigt. Legt man nämlich durch den Coordinatenanfang parallel zur Schnittebene die Hilfsebene:

$$Ax + By + Cz = 0,$$

so kann letztere gegen den Asymptotenkegel drei verschiedene Lagen einnehmen; sie hat mit demselben entweder nur den Kegelmittelpunkt gemein, oder sie berührt ihn, oder sie schneidet ihn in zwei Geraden, und diese drei Fälle sind es, welche nach §. 30 den oben gemachten Unterscheidungen entsprechen. Hiernach lässt sich das Gesammtresultat der Untersuchung auf folgende Weise zusammenstellen: Um die Natur des Schnittes zu beurtheilen, den eine beliebige durch die Gleichung 3) ausgedrückte Ebene mit dem einfachen Hyperboloid bildet, lege man durch den Mittelpunkt der Fläche parallel zu dieser Ebene eine Hilfsebene; wenn letztere mit dem Asymptotenkegel nur den Mittelpunkt gemein hat, so ist der entstandene Schnitt eine Ellipse, deren Mittelpunkt durch die Coordinaten

$$x_0 = \frac{ADa^2}{D^2 - \Delta}, \qquad y_0 = \frac{BDb^2}{D^2 - \Delta}, \qquad z_0 = -\frac{CDc^2}{D^2 - \Delta}$$

$$5) \qquad \Delta = -A^2a^2 - B^2b^2 + C^2c^2 + D^2$$

bestimmt wird; wenn zweitens die Hilfsebene den Asymptotenkegel berührt, so ist der Schnitt eine Parabel, welche in dem speciellen Falle, wo die Hilfsebene mit der ursprünglichen Ebene identisch wird, zu einem System von zwei parallelen Geraden degenerirt; schneidet endlich die Hilfsebene den Asymptotenkegel in zwei Geraden, so ist der Schnitt der ersten Ebene mit der Fläche eine Hyperbel, deren Mittelpunktscoordinaten

$$x_0 = \frac{ADa^2}{D^2 - \Delta}, \qquad y_0 = \frac{BDb^2}{D^2 - \Delta}, \qquad z_0 = -\frac{CDc^2}{D^2 - \Delta}$$

sind; dieser Punkt liegt ausserhalb des von der Fläche umschlossenen Raumes wenn

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2 > 1$$

d. h. wenn Δ positiv ist, er liegt innerhalb desselben bei negativen Δ, endlich für $\Delta = 0$ befindet er sich auf der Fläche selbst, seine Coordinaten sind dann

$$x_0 = \frac{Aa^2}{D}, \qquad y_0 = \frac{Bb^2}{D}, \qquad z_0 = -\frac{Cc^2}{D},$$

und die Hyperbel wird in diesem Falle zu zwei durch diesen Punkt gehenden Geraden.

Von den hiermit erschöpften möglichen Lagen einer Ebene gegen das einfache Hyperboloid wollen wir einige noch etwas specieller betrachten.

Zunächst mag untersucht werden, ob der elliptische Schnitt der Fläche zu einem Kreise werden kann. Denken wir uns die Lage der schneidenden Ebene durch den Abschnitt k, welchen sie auf der y-Achse bildet, durch ihren Neigungswinkel ϑ gegen die xy-Ebene und durch den Winkel ψ bestimmt, welchen ihre Horizontalspur mit der x-Achse einschliesst, so haben wir zur Transformation der Coordinaten die Formeln

$$\begin{aligned} x &= \quad x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta \\ y &= k + x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta, \\ z &= \quad y' \sin\vartheta, \end{aligned}$$

und zwar ist der Durchschnitt der Ebene mit der y-Achse der Anfang des neuen rechtwinkligen Coordinatensystemes der $x'y'$, sowie die Horizontalspur der Ebene dessen x'-Achse. Nach Substitution der obigen Ausdrücke erhalten wir aus Nr. 1) als Gleichung des Schnittes

$$A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

und zwar ist darin

$$A' = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}, \qquad B' = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2},$$

$$C' = \frac{(a^2 - b^2)\sin\psi\cos\psi\cos\vartheta}{a^2 b^2}.$$

Dieser Schnitt wird zu einem Kreise wenn $A' = B'$ und zugleich $C' = 0$ ist. Die letztere Bedingung giebt entweder $\vartheta = 90^0$, oder $\psi = 90^0$, oder $\psi = 0^0$. Setzen wir voraus, dass $a > b$ sei, wodurch die Allgemeinheit insofern nicht beeinträchtigt wird, als es freisteht, die x-Achse durch die grössere der beiden Halbachsen a und b zu legen, so erhalten wir aus der ersten Bedingung

$$\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2} = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}$$

sowohl für $\vartheta = 90^0$ als für $\psi = 90^0$ unmögliche Resultate; dagegen giebt die Supposition $\psi = 0^0$

$$6) \qquad \sin\vartheta = \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Der rechter Hand stehende Ausdruck ist immer reell und ein Produkt zweier ächten Brüche mithin < 1; daraus folgt, dass ein Kreisschnitt der Fläche bei zwei verschiedenen Neigungswinkeln, nämlich ϑ und $180^0 - \vartheta$, möglich ist. Die Ebenen aller derartigen Schnitte sind parallel und stehen wegen $\psi = 0^0$ senkrecht auf der yz-Ebene; mit Rücksicht auf die in §. 30 (S. 117) erhaltenen Resultate kann man überhaupt den bemerkenswerthen Satz aussprechen, dass alle Ebenen, welche den Asymptotenkegel in Kreisen schneiden, auch mit dem einfachen Hyperboloid kreisförmige Schnitte bilden. Die Gleichungen dieser Ebenen (oder auch die ihrer yz-Spuren) haben die gemeinschaftliche Form

$$z = (y-k)\tan\vartheta$$

d. i. zufolge des Werthes von $\tan\vartheta$

$$7) \qquad c\sqrt{a^2-b^2}\,(y-k) \pm b\sqrt{a^2+c^2}.\,z = 0.$$

Die Mittelpunkte der Kreisschnitte liegen auf zwei Durchmessern der aus den Halbachsen b und c construirten Hyperbel, diese Durchmesser schneiden aber die Curve nicht; das einfache Hyperboloid besitzt demnach keine Kreispunkte. Man kann diese Verhältnisse ebenso leicht wie bei dem Ellipsoid graphisch zur Anschauung bringen, wenn man die Fläche auf zwei Ebenen projicirt, von die eine der xy-Ebene und die andere der yz-Ebene parallel ist.

Aus dem Früheren ergab sich, dass ein einfaches Hyperboloid von einer Ebene in geraden Linien geschnitten werden kann, oder, was Dasselbe ist, dass sich auf der Fläche gerade Linien ziehen lassen; diese Eigenschaft, welche das Hyperboloid mit dem Kegel und Cylinder gemein hat, wollen wir direkt betrachten, indem wir die Bedingungen aufsuchen, unter welchen eine durch die Gleichungen ihrer beiden Verticalprojectionen

$$8) \qquad x = Mz + u, \qquad y = Nz + v$$

bestimmte Gerade auf der Fläche liegt. Diess würde nun der Fall sein, wenn alle den vorstehenden Gleichungen genügenden x, y, z ausserdem noch die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

befriedigen; nach Substitution der Werthe von x, y, z wird aus der letzteren Gleichung,

$$\left(\frac{M^2}{a^2}+\frac{N^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+2\left(\frac{Mu}{a^2}+\frac{Nv}{b^2}\right)z+\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1,$$

und diese kann für alle z nur dann bestehen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{Mu}{a^2}+\frac{Nv}{b^2}=0, \qquad \frac{M^2}{a^2}+\frac{N^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0.$$

Von diesen Gleichungen sagt die erste, dass die Horizontalspur der verlangten Geraden auf der Horizontalspur der Fläche liegen muss, was geometrisch unmittelbar vorausgesehen werden konnte; denken wir uns diese Bedingung dadurch befriedigt, dass wir den Punkt uv willkührlich auf der Kehlellipse wählen, so enthalten die übrigen zwei Gleichungen die beiden Unbekannten M und N; als deren Werthe finden wir

$$M=\pm\frac{av}{bc}\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}=\pm\frac{av}{bc},$$

$$N=\mp\frac{bu}{ac}\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}=\mp\frac{bu}{ac},$$

wobei sich die Vorzeichen auf einander beziehen. Vermöge der Realität von M, N, u, v haben wir nun zwei Systeme von geraden Linien auf dem Hyperboloid; für irgend eine Gerade des ersten Systemes gelten die Gleichungen

9) $$x=+\frac{av}{bc}z+u, \qquad y=-\frac{bu}{ac}z+v,$$

und für jede Gerade des anderen Systemes:

10) $$x=-\frac{av}{bc}z+u, \qquad y=+\frac{bu}{ac}z+v.$$

Legen wir eine Gerade des zweiten Systemes durch einen anderen Punkt $u_1 v_1$ der Kehlellipse, so ist für sie

11) $$x=-\frac{av_1}{bc}z+u_1, \qquad y=+\frac{bu_1}{ac}z+v_1;$$

aus der ersten Gleichung von 9) und der ersten Gleichung in 11) folgt

$$z=-\frac{bc}{a}\,\frac{u-u_1}{v+v_1},$$

aus der zweiten Gleichung in 9) verbunden mit der zweiten Gleichung in 11)

$$z = + \frac{ac}{b} \frac{v - v_1}{u + u_1}.$$

Da beide Punkte uv und $u_1 v_1$ auf der Kehlellipse liegen, so ist gleichzeitig

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{u_1^2}{a^2} + \frac{v_1^2}{b^2} = 1$$

mithin durch Subtraction und Zerlegung der Quadratdifferenzen

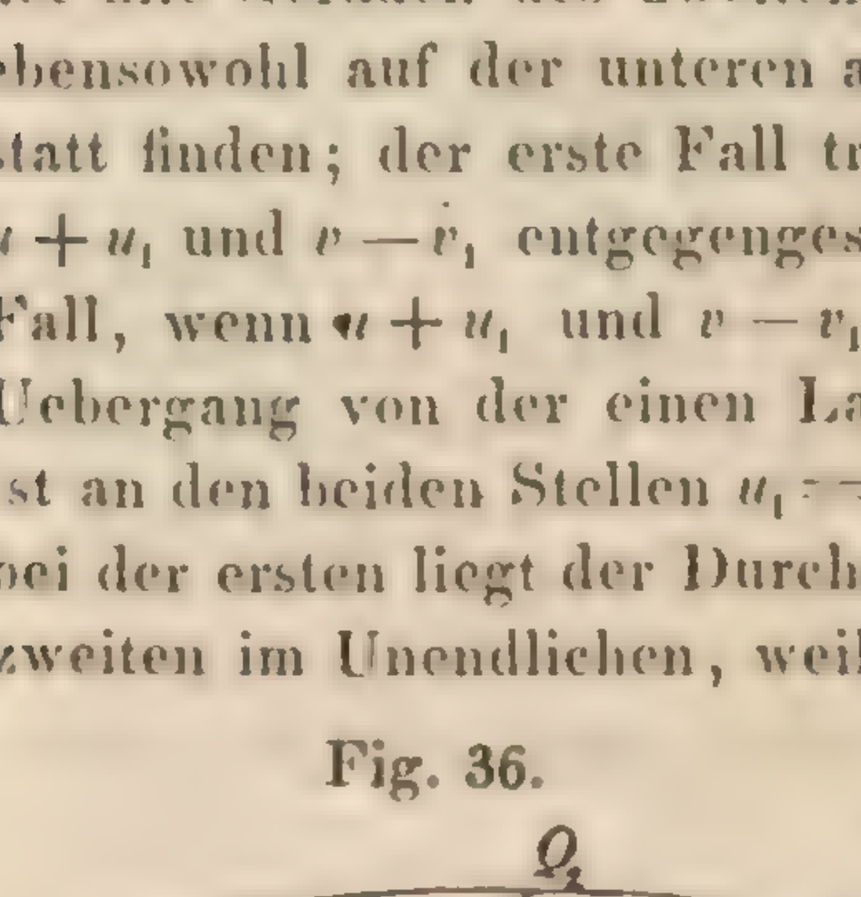
$$\frac{(u - u_1)(u + u_1)}{a^2} + \frac{(v - v_1)(v + v_1)}{b^2} = 0;$$

giebt man dieser Gleichung die Form

$$- \frac{b}{a} \frac{u - u_1}{v + v_1} = + \frac{a}{b} \frac{v - v_1}{u + u_1},$$

so erkennt man die Identität der vorigen beiden Werthe von z; geometrisch heisst diess: jede Gerade des einen Systemes schneidet alle Geraden des zweiten Systemes. Der Durchschnitt kann ebensowohl auf der unteren als auf der oberen Hälfte der Fläche statt finden; der erste Fall tritt bei negativen z ein, d. i. wenn $u + u_1$ und $v - v_1$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, der zweite Fall, wenn $u + u_1$ und $v - v_1$ gleiche Vorzeichen besitzen. Der Uebergang von der einen Lage des Durchschnittes zur anderen ist an den beiden Stellen $u_1 = u$, $v_1 = v$ und $u_1 = -u$, $v_1 = -v$; bei der ersten liegt der Durchschnitt auf der Kehlellipse, bei der zweiten im Unendlichen, weil dann die Geraden 9) und 11) parallel werden. In der Figur ist der Punkt uv mit M, der ihm diametral gegenüberliegende mit N bezeichnet; MP_1 und NQ_1 sind die durch die Punkte M und N gehenden Geraden des ersten, MP_2, NQ_2 die des zweiten Systemes. Die Gerade MP_1 schneidet auf der unteren Hälfte der Fläche alle Geraden des zweiten Systemes, deren Horizontalspuren links zwischen M und N liegen, auf der oberen Hälfte der Fläche alle Geraden des zweiten Systemes, deren Horizontalspuren rechts zwi-

Fig. 36.



schen M und N liegen; endlich ist $MP_1 \parallel NQ_2$ und ebenso $MP_2 \parallel NQ_1$.

Aus den Gleichungen 9) erhält man noch durch Elimination von z

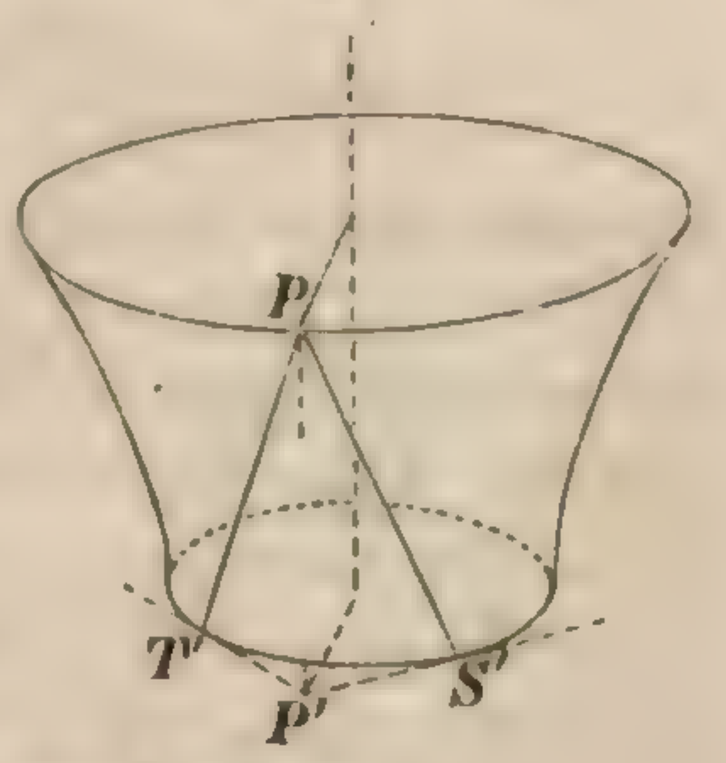
$$\frac{u}{a^2}x + \frac{v}{b^2}y = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v}{b^2} = 1$$

und ebenso aus Nr. 11)

$$\frac{u_1}{a^2}x + \frac{v}{b^2}y = 1,$$

d. h. geometrisch: die Horizontalprojectionen aller auf der Fläche liegenden Geraden berühren die Kehlellipse. Dies giebt ein einfaches Mittel zur Construktion der beiden durch einen gegebenen Punkt P der Fläche gehenden Geraden; von der Horizontalprojection P' des Punktes aus legt man nämlich an die Kehlellipse zwei Tangenten, deren Berührungspunkte S' und T' heissen mögen; die Geraden PS' und PT' sind dann die verlangten Linien.

Fig. 37.



Legt man durch irgend eine Gerade des einen und durch eine sie schneidende Gerade des anderen Systemes eine Ebene, so erhält man eine von den Ebenen, welche die Fläche in zwei Geraden schneiden, für die Coefficienten ihrer Gleichung

12) $$Ax + By + Cz = D$$

gilt dann die Eigenschaft

13) $$A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 = D^2$$

und die Coordinaten des Punktes, welcher als Durchschnitt der beiden Geraden sowohl der Ebene als der Fläche angehört, sind wie früher

$$\frac{Aa^2}{D}, \quad \frac{Bb^2}{D}, \quad -\frac{Cc^2}{D}.$$

Wir legen weiter in der Höhe $z = -\frac{Cc^2}{D}$ parallel zur xy-Ebene eine neue Ebene; sie schneidet das Hyperboloid in einer Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{C^2c^2}{D^2} = \frac{A^2a^2 + B^2b^2}{D^2}$$

ist, wofür wir schreiben

14) $$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

$$a_1 = \frac{a\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2}}{D}, \quad b_1 = \frac{b\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2}}{D};$$

die nämliche Ebene schneidet ferner die durch 12) dargestellte Ebene in einer Geraden, deren Gleichung ist

$$Ax + By = D + \frac{C^2c^2}{D} = \frac{A^2a^2 + B^2b^2}{D},$$

wofür wir schreiben

15) $$A_1x + B_1y = 1,$$

$$A_1 = \frac{AD}{A^2a^2 + B^2b^2}, \qquad B_1 = \frac{BD}{A^2a^2 + B^2b^2}.$$

Vermöge dieser Werthe ergiebt sich

$$A_1^2a_1^2 + B_1^2b_1^2 = 1,$$

woraus folgt, dass die Gerade 15) die Ellipse 14) berührt. Auf ähnliche Weise kann man eine noch allgemeinere Eigenschaft der Ebene 12) entdecken; legt man nämlich durch den vorhin genannten Punkt irgend einen Schnitt s der Fläche, dessen Ebene von selbst die Ebene 12) in einer Geraden g schneidet, so ist letztere jedesmal Tangente an s. Demgemäss muss die betrachtete Ebene als Inbegriff aller durch den genannten Punkt gehenden Tangenten der Fläche d. h. als die Berührungsebene in diesem Punkte angesehen werden, wie sich später noch auf anderem Wege ergeben wird.

Daran knüpft sich die Bestimmung der Berührungsebene für einen gegebenen Punkt xyz der Fläche. Bezeichnen wir die Gleichung der verlangten Ebene mit

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D,$$

so müssen dem Vorigen zufolge die Bedingungen

$$A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 = D^2$$

und

$$x = \frac{Aa^2}{D}, \qquad y = \frac{Bb^2}{D}, \qquad z = -\frac{Cc^2}{D}$$

erfüllt sein. Aus den letzten Gleichungen ergeben sich die Werthe von A, B, C, sie genügen der ersten Gleichung und daher ist

16) $$\frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta - \frac{z}{c^2}\zeta = 1$$

die Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz.

Hieraus folgen noch die Gleichungen der Normalen in diesem Punkte; sie sind

$$\eta - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(\xi - x), \qquad \zeta - z = -\frac{a^2 z}{c^2 x}(\xi - x)\,.$$

oder, auf die beiden Verticalebenen bezogen,

$$17)\quad \xi - x = -\frac{c^2 x}{a^2 z}(\zeta - z), \qquad \eta - y = -\frac{c^2 y}{b^2 z}(\zeta - z).$$

§. 39.

Das getheilte Hyperboloid.

Die Gleichung der dritten centralen Fläche war

$$1)\qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

setzt man der Reihe nach $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, so ergeben sich als Gleichungen der Spuren oder Hauptschnitte der Fläche

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

die erste dieser Gleichungen charakterisirt keine reelle Curve, die Fläche hat demnach mit der xy-Ebene keinen Punkt gemein; die beiden anderen Gleichungen gehören zu Hyperbeln und zwar besitzt der xz-Schnitt die Haupthalbachse c und die Nebenhalbachse a, der yz-Schnitt die nämliche Haupthalbachse und die Nebenhalbachse b. Für eine in der Entfernung h parallel zur xy-Ebene gelegte Schnittebene ist $z = h$ mithin die Gleichung des Schnittes

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1$$

oder

$$\left(\frac{x}{\frac{a}{c}\sqrt{h^2 - c^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b}{c}\sqrt{h^2 - c^2}}\right)^2 = 1,$$

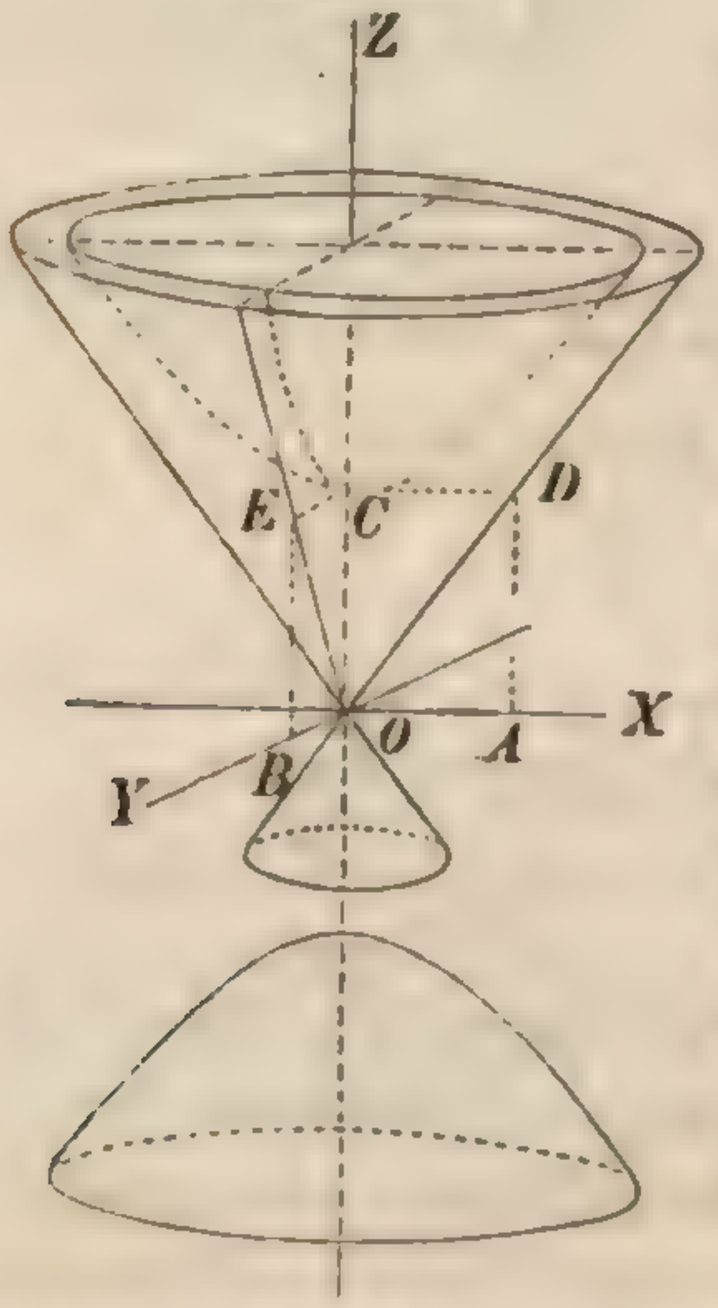
folglich der Schnitt im Allgemeinen eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{h^2 - c^2}, \qquad \frac{b}{c}\sqrt{h^2 - c^2}.$$

Letztere sind so lange imaginär als $h^2 < c^2$, d. h. h zwischen $-c$ und $+c$ enthalten ist, alle zu solchen h gehörenden Ebenen schneiden mithin die Fläche nicht; für $h^2 = c^2$ besteht jene Ellipse aus einem blossen Punkte, die Ebenen, für welche $z = +h$ oder $z = -h$, berühren daher die Fläche; ist aber $h^2 > c^2$, so werden

die Achsen der Ellipse reell und wachsen mit h gleichzeitig ins Unendliche. Demzufolge kann man sich die Fläche durch die Peripherie einer veränderlichen Ellipse erzeugt denken, wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und ihre Scheitel auf

Fig. 38.



zwei festen Hyperbeln fortrücken, deren eine in der xz-Ebene aus den Halbachsen $OC = c$, $OA = CD = a$, und deren andere in der yz-Ebene aus den Halbachsen $OC = c$, $OB = CE = b$ construirt ist, wobei c für beide Hyperbeln als Haupthalbachse dient. Die Linien a, b, c nennt man die Halbachsen der Fläche und letztere ein dreiachsiges getheiltes Hyperboloid. Für $b = a$ verwandelt sich dasselbe in das getheilte Rotationshyperboloid, für $a > b$ und $c = \infty$ wird es zu einem elliptischen Cylinder. Ertheilt man der Gleichung 1) durch Einführung der Asymptotenwinkel $COD = \alpha$ und $COE = \beta$ die Form

$$x^2 \cot^2 \alpha + y^2 \cot^2 \beta - z^2 = -c^2$$

und lässt nachher, ohne Aenderung von α und β, c in Null übergehen, so ergiebt sich

$$x^2 \cot^2 \alpha + y^2 \cot^2 \beta - z^2 = 0;$$

das Hyberboloid degenerirt dann zu einer elliptischen Kegelfläche. Die Gleichung derselben kann auch in der Form

$$2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

dargestellt werden, aus welcher durch fast wörtlich dieselben Schlüsse wie in §. 38 folgt, dass dieser elliptische Kegel der Asymptotenkegel des getheilten Hyperboloides ist.

Eine beliebige Ebene, deren Gleichung

$$3) \qquad Ax + By + Cz = D$$

sein möge, schneidet die Fläche in einer Linie zweiten Grades, für deren Horizontalprojection folgende Gleichung gilt

$$4) \quad A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2C_1 xy + 2D_1 x + 2E_1 y + F_1 = 0,$$

worin

$$A_1 = -\frac{A^2}{c^2} + \frac{C^2}{a^2}, \qquad B_1 = -\frac{B^2}{c^2} + \frac{C^2}{b^2}, \qquad C_1 = -\frac{AB}{c^2},$$

$$D_1 = \frac{AD}{c^2}, \qquad E_1 = \frac{BD}{c^2}, \qquad F_1 = -\frac{D^2}{c^2} + C^2.$$

Hieraus ergeben sich die Werthe

$$C_1^2 - A_1 B_1 = \frac{A^2 a^2 + B^2 b^2 - C^2 c^2}{a^2 b^2 c^2} C^2$$

$$A_1 E_1^2 + B_1 D_1^2 + (C_1^2 - A_1 B_1) F_1 - 2 C_1 D_1 E_1$$
$$= \frac{A^2 a^2 + B^2 b^2 - C^2 c^2 + D^2}{a^2 b^2 c^2} C^4,$$

mittelst deren Vorzeichen die Natur des Schnittes beurtheilt werden kann. Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden.

Wenn erstens $C_1^2 - A_1 B_1$ negativ also

$$A^2 a^2 + B^2 b^2 < C^2 c^2$$

und mithin A_1 positiv ist, so bedeutet die Gleichung 4) im Allgemeinen eine Ellipse, deren Achsen ebensowohl reell, als $= 0$, als imaginär sein können. Das Erste findet unter der Bedingung statt, dass der Ausdruck

$$\Delta = A^2 a^2 + B^2 b^2 - C^2 c^2 + D^2$$

einen positiven Werth hat; die Mittelpunktscoordinaten der Schnittprojection sind dann

$$\frac{AD a^2}{-D^2 + \Delta} \text{ und } \frac{BD b^2}{-D^2 + \Delta}.$$

Für $\Delta = 0$ reducirt sich diese Ellipse auf ihren Mittelpunkt, dessen Coordinaten

$$-\frac{Aa^2}{D}, \qquad -\frac{Bb^2}{D}$$

sind; endlich für negative Δ wird die Curve imaginär.

Im zweiten Hauptfalle $C_1^2 - A_1 B_1 = 0$ oder

$$A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2 c^2$$

bedeutet die Gleichung 4) eine Parabel so lange Δ nicht verschwindet d. h. $D \gtrless 0$ ist. Für $D = 0$ dagegen bringt man die Gleichung durch eine ähnliche Transformation wie im vorigen Paragraphen auf die Form

$$\left(\frac{Bb}{a} x - \frac{Aa}{b} y\right)^2 = -C^2 c^2,$$

welcher keine geometrische Bedeutung zukommt.

Im dritten Hauptfalle $C_1^2 - A_1 B_1 > 0$ oder

$$A^2 a^2 + B^2 b^2 > C^2 c^2$$

ist die Projection des Schnittes jederzeit eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Coordinaten

$$\frac{ADa^2}{-D^2+\Delta} \text{ und } \frac{BDb^2}{-D^2+\Delta}$$

besitzt. Diese Erörterungen über die Projection des Schnittes sind leicht auf den letzteren zu übertragen, wobei zu berücksichtigen ist, dass den drei Hauptfällen $A^2a^2+B^2b^2 \gtreqless C^2c^2$ hier dieselbe geometrische Bedeutung wie im vorigen Paragraphen zukommt. Das Gesammtergebniss lautet dann folgendermaassen: Um die Natur des Schnittes beurtheilen zu können, den eine beliebige durch die Gleichung 3) ausgedrückte Ebene mit dem getheilten Hyperboloid bildet, lege man durch den Mittelpunkt der Fläche parallel zu dieser Ebene eine Hilfsebene; wenn letztere mit dem Asymptotenkegel nur den Mittelpunkt gemein hat, so ist der Schnitt im Allgemeinen eine Ellipse, deren Mittelpunktscoordinaten sind

$$x_0 = -\frac{ADa^2}{D^2-\Delta}, \quad y_0 = -\frac{BDb^2}{D^2-\Delta}, \quad z_0 = \frac{CDc^2}{D^2-\Delta},$$

$$5) \qquad \Delta = A^2a^2+B^2b^2-C^2c^2+D^2;$$

die Achsen dieser Ellipse sind reell für positive Δ, bei $\Delta = 0$ degenerirt die Ellipse zu einem Punkte, dessen Coordinaten

$$x_0 = -\frac{Aa^2}{D}, \quad y_0 = -\frac{Bb^2}{D}, \quad z_0 = \frac{Cc^2}{D}$$

sind und in welchem die Ebene die Fläche berührt, für negative Δ hat die Ebene keinen Punkt mit dem Hyperboloid gemein; wenn zweitens die Hilfsebene den Asymptotenkegel berührt, so ist der Schnitt eine Parabel, welche nur in dem Falle $D = 0$ zu existiren aufhört; schneidet endlich die Hilfsebene den Asymptotenkegel in zwei Geraden; so ist der Schnitt der Fläche jederzeit eine Hyperbel, deren Mittelpunktscoordinaten durch die Formeln

$$x_0 = -\frac{ADa^2}{D^2-\Delta}, \quad y_0 = -\frac{BDb^2}{D^2-\Delta}, \quad z_0 = \frac{CDc^2}{D^2-\Delta}$$

bestimmt werden. Geradlinige Schnitte der Fläche sind nicht vorhanden.

Wir untersuchen noch besonders die Möglichkeit kreisförmiger Schnitte der Fläche. Die Horizontalspur der schneidenden Ebene möge mit der x-Achse den Winkel ψ bilden, der Neigungswinkel der Schnittebene gegen die xy-Ebene sei ϑ, endlich k das Stück, welches sie von der y-Achse abschneidet. Nehmen wir

die Horizontalspur der Schnittebene zur Achse der x' und den Punkt, in welchem sie der y-Achse begegnet, zum Anfangspunkte eines neuen ebenen rechtwinkligen Systemes, so ergiebt sich die Gleichung des Schnittes durch Substitution der Werthe

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta \\ y &= k + x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta \\ z &= y' \sin\vartheta; \end{aligned}$$

das Resultat ist von der Form

$$A' x'^2 + B' y'^2 + 2C' x' y' + 2D' x' + 2E' y' + F' = 0$$

und darin

$$A' = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}, \quad B' = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}$$

$$C' = \frac{(a^2 - b^2)\cos\psi \sin\psi \cos\vartheta}{a^2 b^2}.$$

Diese Gleichung repräsentirt einen Kreis für $C' = 0$ und $A' = B'$. Die erste Bedingung giebt entweder $\vartheta = 90^0$ oder $\psi = 90^0$ oder $\psi = 0^0$. Setzen wir $a > b$ voraus, wodurch die Allgemeinheit der Betrachtung nicht alterirt wird, so liefert die Bedingung $A' = B'$ d. h.

$$\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2} = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}$$

sowohl für $\vartheta = 90^0$ als für $\psi = 90^0$ unmögliche Resultate; dagegen findet sich für $\psi = 0^0$

$$6) \qquad \sin\vartheta = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Da der Werth von $\sin\vartheta$ jederzeit reell und zugleich ein ächter Bruch ist, so existiren zwei Systeme von Kreisschnitten, deren Ebenen auf der yz-Ebene senkrecht stehen und entweder unter dem Winkel ϑ oder unter $180^0 - \vartheta$ gegen die xy-Ebene geneigt sind. Aus der Uebereinstimmung der Formel 6) mit der Formel 9) in §. 30 ergiebt sich ferner, dass alle Ebenen, welche den Asymptotenkegel in Kreisen und zugleich das Hyperboloid schneiden, auch mit letzterer Fläche kreisförmige Schnitte bilden. Die Gleichungen der Kreisschnittebenen (oder deren yz-Spuren) haben die gemeinschaftliche Form

$$z = (y - k)\tan\vartheta$$

d. i. zufolge des Werthes von $\tan\vartheta$

$$7) \qquad c\sqrt{a^2 - b^2}\,(y - k) \pm b\sqrt{a^2 + c^2}\,.\,z = 0;$$

die Schnitte sind reell so lange

$$\Delta = c^2\left\{-b^2(b^2+c^2)+(a^2-b^2)k^2\right\}$$

positiv ist d. h. für alle der Ungleichung

$$k^2 > \frac{b^2(b^2+c^2)}{a^2-b^2}$$

genügenden k; wenn dagegen

$$k^2 = \frac{b^2(b^2+c^2)}{a^2-b^2},$$

so degeneriren die Kreisschnitte zu Punkten, deren Coordinaten sind

$$0, \qquad \pm\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}, \qquad \pm\frac{c\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

wobei alle Combinationen der Vorzeichen gelten; für

$$k^2 < \frac{b^2(b^2+c^2)}{a^2-b^2}$$

existiren keine Kreisschnitte mehr. Die erwähnten vier Punkte heissen die Kreispunkte des getheilten Hyperboloides; man kann sie und die Spuren der Kreisschnittebenen leicht dadurch zur Anschauung bringen, dass man die Fläche auf zwei den Ebenen xy und yz parallele Ebenen projicirt.

Wir bestimmen endlich noch die durch einen gegebenen Punkt xyz der Fläche gehende Berührungsebene und Normale. Bezeichnet

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D$$

die Gleichung der Tangentialebene, so müssen, dem Früheren zufolge, nachstehende Bedingungen erfüllt sein:

$$x = -\frac{Aa^2}{D}, \qquad y = -\frac{Bb^2}{D}, \qquad z = \frac{Cc^2}{D},$$

$$\Delta = A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 + D^2 = 0;$$

aus den ersten drei Gleichungen ergeben sich die Werthe von A, B, C und diese genügen der letzten Gleichung, weil der Punkt xyz auf der Fläche liegt; demnach ist

$$8) \qquad -\frac{x}{a^2}\xi - \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta = 1$$

die Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz. Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$9) \quad \xi - x = -\frac{c^2x}{a^2z}(\zeta - z), \qquad \eta - y = -\frac{c^2y}{b^2z}(\zeta - z)$$

als Gleichungen der Normalen im Punkte xyz.

§. 36.

Das elliptische Paraboloid.

Die erste von den nichtcentralen Flächen zweiten Grades wird durch die Gleichung

$$1) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$$

dargestellt, worin a und b wesentlich positive Grössen bezeichnen. Als Gleichungen der Hauptschnitte oder Spuren der Fläche erhalten wir der Reihe nach

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 0, \qquad \frac{x^2}{2a} = z, \qquad \frac{y^2}{2b} = z;$$

der ersten Gleichung genügen nur die Werthe $x = 0$, $y = 0$, die Fläche wird also von der xy-Ebene nicht geschnitten, sondern im Anfangspunkte der Coordinaten berührt; die zweite Gleichung bedeutet eine Parabel, deren Halbparameter $= a$, deren Scheitel der Coordinatenanfang und deren Achse die z-Achse ist, die letzte Gleichung charakterisirt gleichfalls eine Parabel mit dem Halbparameter b, mit demselben Scheitel und der nämlichen Achse. Für einen in der Höhe $z = h$ parallel zur xy-Ebene gelegten Schnitt erhält man als Gleichung

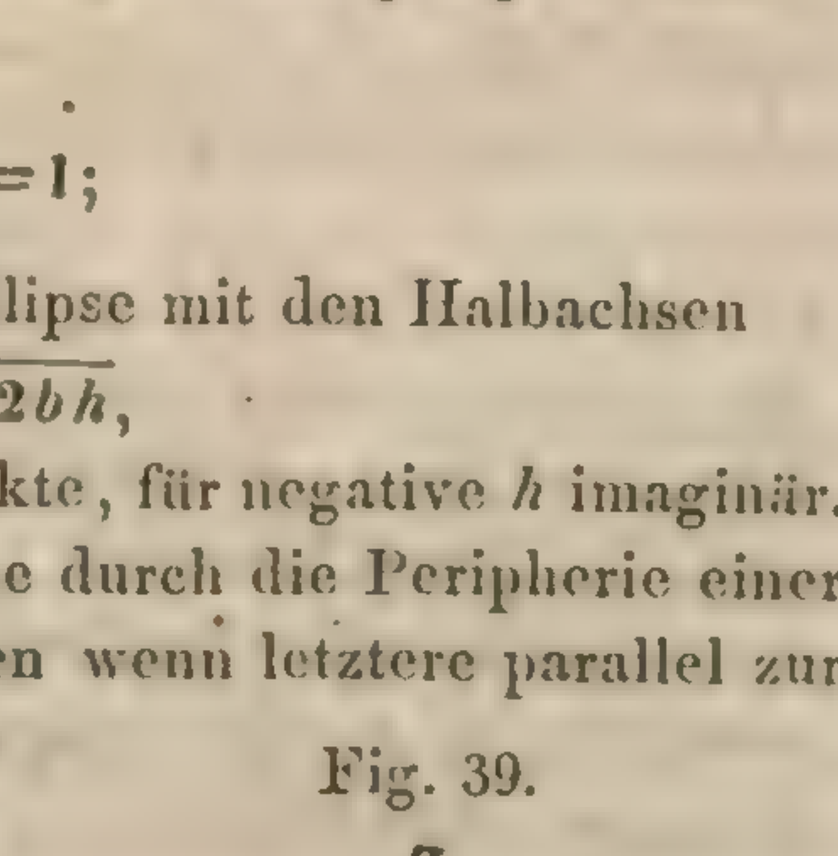
$$\frac{x^2}{2ah} + \frac{y^2}{2bh} = 1;$$

der Schnitt ist bei positiven h eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\sqrt{2ah} \text{ und } \sqrt{2bh},$$

für $h = 0$ wird dieselbe zu einem Punkte, für negative h imaginär. Demzufolge kann man sich die Fläche durch die Peripherie einer veränderlichen Ellipse erzeugt denken wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und ihre Scheitel auf zwei Parabeln fortrücken, deren eine in der xz-Ebene mit dem Halbparameter a und deren andere in der yz-Ebene mit dem Halbparameter b construirt ist, wobei für beide Parabeln die z-Achse als Achse und der Coordinatenanfang als Scheitel gilt. Die Linien $a = FA$ und $b = GB$ heissen die Halbparameter der Fläche, O ihr Scheitel und die Fläche selbst ein elliptisches Pa-

Fig. 39.



raboloid. Für $b = a$ wird dasselbe zu einem Rotationsparaboloid, für $a = \infty$ oder $b = \infty$ zu einem parabolischen Cylinder.

Eine beliebige Ebene, deren Gleichung

2) $$Ax + By + Cz = D$$

heissen möge, schneidet die Fläche in einer Curve, von welcher die Horizontalprojection durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2\,\frac{D - Ax - By}{C}$$

bestimmt ist; ertheilt man letzterer die bessere Form

$$\frac{1}{a}\left(x + \frac{Aa}{C}\right)^2 + \frac{1}{b}\left(y + \frac{Bb}{C}\right)^2 = \frac{A^2a + B^2b + 2CD}{C^2},$$

so erkennt man in der Curve eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{\sqrt{a\,(A^2a + B^2b + 2CD)}}{C}, \qquad \frac{\sqrt{b\,(A^2a + B^2b + 2CD)}}{C}.$$

Hierbei unterscheiden wir die zwei Hauptfälle, ob C von Null verschieden oder $= 0$ ist. Im ersten Falle sind die Halbachsen reell und endlich so lange der Ausdruck

3) $$\Delta = A^2a + B^2b + 2CD$$

positiv bleibt, die Coordinaten des Mittelpunktes der Schnittprojection bestimmen sich durch die Formeln

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \qquad y_0 = -\frac{Bb}{C};$$

für $\Delta = 0$ verschwinden die Halbachsen der Ellipse, letztere zieht sich dann auf ihren Mittelpunkt zusammen; für negative Δ wird die Curve imaginär. Im zweiten Hauptfalle $C = 0$, d. h. wenn die Schnittebene parallel zur z-Achse liegt, kann die Elimination von z nicht vorgenommen werden, weil dann die Gleichung der Schnittebene

4) $$Ax + By = D$$

zugleich auch die Gleichung der Schnittprojection ist; eliminirt man in diesem Falle y, so erhält man die Gleichung der Verticalprojection des Schnittes, nämlich

$$\frac{x^2}{a} + \frac{(D - Ax)^2}{B^2b} = 2z$$

oder bei besserer Anordnung und unter Rücksicht auf den Umstand, dass für $C = 0$ die Grösse Δ in $A^2a + B^2b$ übergeht,

$$z - \frac{D^2}{2\Delta} = \frac{\Delta}{2B^2ab}\left(x - \frac{ADa}{\Delta}\right)^2.$$

Diese Gleichung repräsentirt eine Parabel, deren Scheitel durch die Coordinaten

$$\frac{\Delta D a}{J} \text{ und } \frac{D^2}{2J}$$

bestimmt wird, und deren Halbparameter

$$= \frac{B^2 ab}{\Delta}$$

ist. Wenden wir diese für die Projectionen des Schnittes gegebenen Entscheidungen auf den Schnitt selber an, so gelangen wir zu folgendem Gesammtresultate: Die zur Achse des Paraboloides nicht parallele Ebene 2) schneidet die Fläche in einer Ellipse, deren Mittelpunktscoordinaten

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \qquad y_0 = -\frac{Bb}{C}, \qquad z_0 = \frac{\Delta - CD^2}{C^2}$$

sind; der Schnitt ist reell für $\Delta > 0$, reducirt sich für $\Delta = 0$ auf einen durch die Coordinaten

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \qquad y_0 = -\frac{Bb}{C}, \qquad z_0 = -\frac{D}{C}$$

bestimmten Punkt, und wird für $\Delta < 0$ imaginär; eine zur Flächenachse parallele Ebene schneidet das Paraboloid jederzeit in einer Parabel. Hyperbolische und geradlinige Schnitte existiren nicht.

Wie bei allen elliptischen Schnitten entsteht auch hier die Frage, ob dieselben zu Kreisen werden können. Die Horizontalspur der schneidenden Ebene nehmen wir zur x'-Achse eines neuen in der Ebene enthaltenen rechtwinkligen Coordinatensystemes, $\angle (x x') = \psi$, der Neigungswinkel der Ebene gegen die xy-Ebene heisse ϑ, der Durchschnitt der Ebene mit y-Achse liege in der Entfernung k vom ursprünglichen Coordinatenanfange und sei der Anfangspunkt des neuen Systemes; die Gleichung des Schnittes erhalten wir jetzt aus Nr. 1) durch Substitution der Werthe

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta, \\ y &= k + x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta, \\ z &= y' \sin\vartheta. \end{aligned}$$

Das Resultat dieser Operation ist von der Form

$$A' x'^2 + B' y'^2 + 2C' x' y' + 2D' x' + 2E' y' + F' = 0,$$

und darin

$$A' = \frac{\cos^2\psi}{a} + \frac{\sin^2\psi}{b}, \qquad B' = \left(\frac{\sin^2\psi}{a} + \frac{\cos^2\psi}{b}\right)\cos^2\vartheta,$$

$$C' = \frac{(a-b)\sin\psi\cos\psi\cos\vartheta}{ab}.$$

Der Schnitt wird zu einem Kreise für $C' = 0$ und $A' = B'$; die erste Bedingung kann unter der nicht beschränkenden Annahme $a > b$ nur durch $\vartheta = 90^0$ oder $\psi = 90^0$ oder $\psi = 0^0$ erfüllt werden; die zweite Bedingung

$$\frac{\cos^2\psi}{a} + \frac{\sin^2\psi}{b} = \left(\frac{\sin^2\psi}{a} + \frac{\cos^2\psi}{b}\right)\cos^2\vartheta$$

liefert für $\vartheta = 90^0$ und für $\psi = 90^0$ unmögliche Ergebnisse, dagegen für $\psi = 0^0$

5) $$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

was, wegen $b < a$ und wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzel, zwei reelle Bestimmungen von ϑ giebt. Demnach existiren zwei Systeme von Kreisschnitten, deren Ebenen auf der yz-Ebene senkrecht stehen und mit der xy-Ebene die Winkel ϑ und $180^0 - \vartheta$ einschliessen. Die Gleichungen der Kreisschnittebenen (oder deren yz-Spuren) stehen unter der allgemeinen Form

$$z = (y-k)\tan\vartheta$$

der zufolge des Werthes von $\tan\vartheta$

$$\pm (y-k)\sqrt{\frac{a-b}{b}} - z = 0,$$

wofür wir schreiben

6) $$\sqrt{a-b}.y \mp \sqrt{b}.z = k\sqrt{a-b}.$$

Der Kreisschnitt, den diese Ebene mit dem Paraboloid bildet, ist reell wenn die Grösse

$$\Delta = (a-b)\,b \mp 2k\sqrt{(a-b)\,b}$$

positiv ausfällt, also unter Benutzung des oberen Zeichens für

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-b)\,b} > k > -\infty$$

und in Beziehung auf das untere Zeichen für

$$+\infty > k > -\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-b)\,b}$$

die Kreisschnitte des einen Systemes werden folglich erhalten wenn man k von $\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)\,b}$ bis $-\infty$ abnehmen lässt, die des anderen, wenn k von $-\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)\,b}$ bis $+\infty$ wächst. Der Schnitt degenerirt zu einem Punkte, wenn $\Delta = 0$ also bei dem ersten Sy-

steme $k = \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)b}$, beim zweiten $k = -\sqrt{(a-b)b}$ ist; die Coordinaten dieser Punkte sind im ersten Falle

$$0, \quad +\sqrt{(a-b)b}, \qquad \tfrac{1}{2}(a-b),$$

und im zweiten

$$0, \quad -\sqrt{(a-b)b}, \qquad \tfrac{1}{2}(a-b);$$

diess sind die zwei Kreispunkte der Fläche. Jenseit der angegebenen Grenzen, d. h. für negative Δ, existiren keine Kreisschnitte. Diese Ergebnisse können leicht graphisch veranschaulicht werden wenn man das Paraboloid auf zwei Ebenen projicirt, von denen die eine der xy-Ebene und die andere der yz-Ebene parallel liegt.

Wenn irgend ein elliptischer Schnitt sich auf seinen Mittelpunkt reducirt, so wird die schneidende Ebene zur Berührungsebene und jener Punkt zum Berührungspunkte; daraus entspringt wie früher die Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt xyz des Paraboloides eine Tangentialebene an das letztere zu legen. Die Gleichung der verlangten Ebene sei

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D,$$

so müssen die im Vorigen bewiesenen Relationen

$$\Delta = A^2a + B^2b + 2CD = 0,$$

$$x = -\frac{Aa}{C}, \qquad y = -\frac{Bb}{C}, \qquad z = -\frac{D}{C}$$

statt finden; aus den letzten drei Gleichungen ergeben sich die Werthe von A, B, D, ausgedrückt durch C, deren Substitution in die erste Bedingung diese identisch macht, weil der Punkt xyz auf der Fläche liegt. Vermöge der Werthe von A, B, D ergiebt sich

$$-\frac{x}{a}\xi - \frac{y}{b}\eta + \zeta = -z$$

oder besser

$$7) \qquad \frac{x}{az}\xi + \frac{y}{bz}\eta - \frac{1}{z}\zeta = 1$$

als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz.

Hieraus zieht man noch die beiden Gleichungen

$$8) \quad \xi - x = -\frac{x}{a}(\zeta - z), \qquad \eta - y = -\frac{y}{b}(\zeta - z),$$

welche für die im Punkte xyz errichtete Normale gelten.

§. 41.

Das hyperbolische Paraboloid.

Die letzte individuelle Fläche zweiten Grades, deren Untersuchung uns noch obliegt, wird durch die Gleichung

$$1) \qquad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

charakterisirt; daraus folgen als Gleichungen der Hauptschnitte

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 0, \qquad \frac{x^2}{2a} = z, \qquad -\frac{y^2}{2b} = z.$$

Giebt man der ersten die Form

$$y = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}\, x$$

und bezeichnet mit α den spitzen Winkel dessen Tangente $= \sqrt{\frac{b}{a}}$ ist, so erkennt man in der xy-Spur der Fläche ein System von zwei durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden, deren eine mit der x-Achse den Winkel α und deren andere mit derselben Achse den Winkel $180^0 - \alpha$ einschliesst. Die xz-Spur der Fläche bildet eine Parabel mit dem Halbparameter a, der Coordinatenanfang ist ihr Scheitel und der positive Theil der z-Achse ihre Achse; die yz-Spur besteht gleichfalls aus einer Parabel, welche b zum Halbparameter, den Coordinatenanfang zum Scheitel und den negativen Theil der z-Achse zur Achse hat, weil der betreffenden Gleichung nur bei negativen z eine geometrische Bedeutung zukommt. Legt man ferner in der Höhe h eine zur xy-Ebene parallele Ebene, so schneidet letztere die Fläche in der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2h$$

bestimmten Curve; der Schnitt ist jedenfalls eine Hyperbel, wobei aber die beiden Fälle eines positiven und negativen h zu unterscheiden sind. Für $h > 0$ giebt man der Gleichung die Form

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2ah}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2bh}}\right)^2 = 1,$$

die Halbachsen sind dann $\sqrt{2ah}$, $\sqrt{2bh}$ und für den Asymptotenwinkel β hat man

$$tan\ \beta = \frac{\sqrt{2bh}}{\sqrt{2ah}} = \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ mithin } \beta = \alpha;$$

im zweiten Falle $h = -h_1$ ist zu schreiben

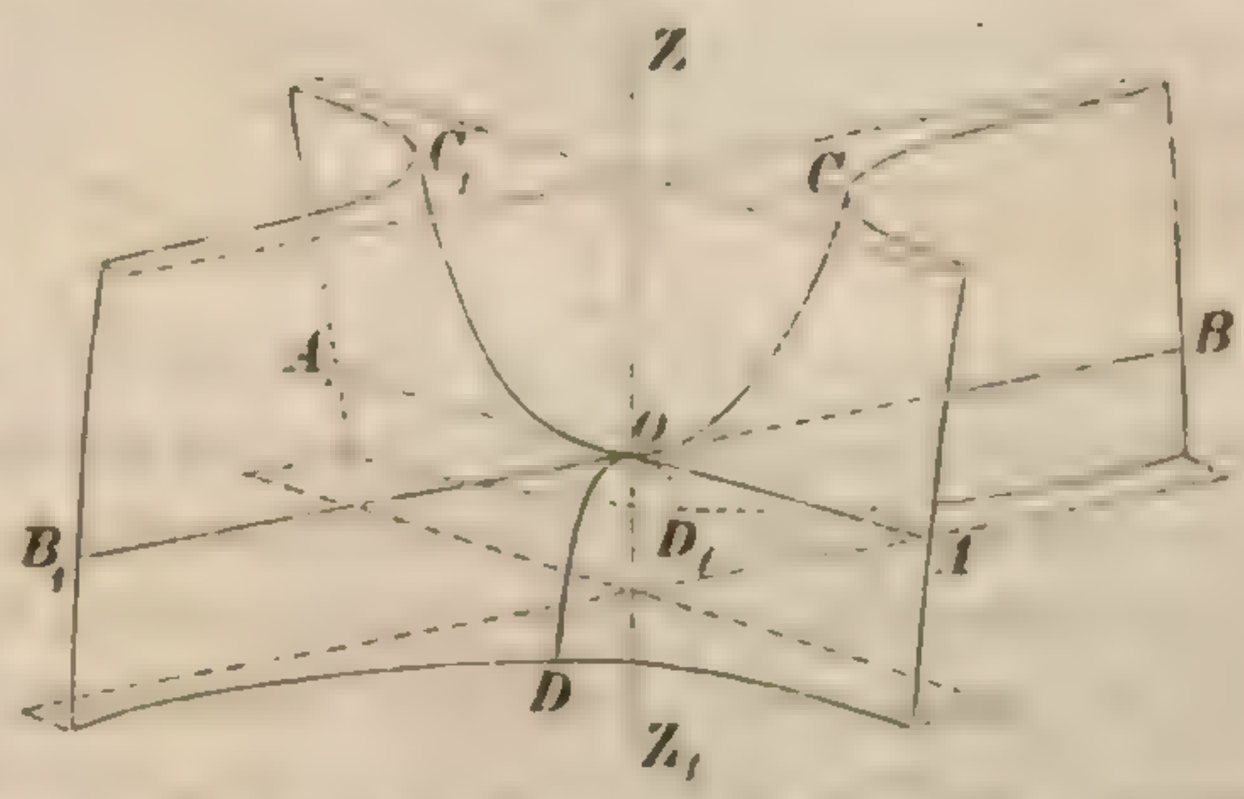
$$\left(\frac{y}{\sqrt{2bh_1}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2ah_1}}\right)^2 = 1,$$

es wird dann $\sqrt{2bh_1}$ zur Haupt-, $\sqrt{2ah_1}$ zur Nebenhalbachse und für den Asymptotenwinkel β_1 hat man

$$tan\ \beta_1 = \frac{\sqrt{2ah_1}}{\sqrt{2bh_1}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ mithin } \beta_1 = 90^0 - \alpha.$$

Demgemäss kann man sich die Fläche durch eine veränderliche Hyperbel erzeugt denken, wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und ihre Scheitel auf zwei festen Parabeln fortrücken; der gemeinschaftliche Scheitel beider Parabeln ist der Coordinatenanfang, die eine liegt in der xz-Ebene und hat ihre Achse in der Richtung der positiven z, die andere befindet sich in der yz-Ebene und erstreckt ihre Achse in der Richtung der negativen z; endlich ist noch zu bemerken, dass alle auf der positiven Seite der z construirten Hyperbeln denselben Asymptotenwinkel besitzen und dass ebenso alle auf der entgegengesetzten Seite befindlichen Hyperbeln einen gemeinschaftlichen Asymptotenwinkel haben, welcher den erstgenannten zu 90° ergänzt. Die Figur zeigt die aus den Geraden AOA_1 und BOB_1 bestehende Horizontalspur der Fläche, die beiden parabolischen Verticalspuren COC_1, DOD_1 und zwei zur xy-Ebene parallele hyperbolische Schnitte, deren Asymptoten den Geraden AA_1 und BB_1 parallel liegen; die Coordinatenachsen der x und der y sind (um einer Ueberladung der Figur zu entgehen) weggelassen, man hat sich dieselben als die Halbirungslinien der Winkel AOB und AOB_1 zu denken. Die hiermit bestimmte sattelförmige Fläche heisst ein hyperbolisches Paraboloid, a und b ihre Halbparameter, O ihr Scheitel, ZZ_1 ihre Achse.

Fig. 40.



Eine beliebige durch die Gleichung

2) $$Ax + By + Cz = D$$

dargestellte Ebene schneidet die Fläche in einer Curve, für deren Horizontalprojection sich die Gleichung findet

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2\,\frac{D - Ax - By}{C};$$

ertheilt man dieser die bessere Form

$$\frac{1}{a}\left(x + \frac{Aa}{C}\right)^2 - \frac{1}{b}\left(y - \frac{Bb}{C}\right)^2 = \frac{A^2a - B^2b + 2CD}{C^2},$$

so bemerkt man augenblicklich, dass die Schnittprojection im Allgemeinen eine Hyperbel darstellt; doch sind dabei die Fälle $C \gtrless 0$ und $C = 0$ zu unterscheiden. Wenn erstens C nicht verschwindet und der Ausdruck

3) $$\Delta = A^2a - B^2b + 2CD.$$

irgend einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so ist die Curve sicher eine Hyperbel, deren Mittelpunktscoordinaten

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \qquad y_0 = +\frac{Bb}{C}$$

sind; ihre Hauptalbachse liegt bei positiven Δ in der Richtung der x, bei negativen in der Richtung der y. Verschwindet aber Δ, so degenerirt die Hyperbel in ein System von zwei sich schneidenden Geraden (die Asymptoten); die Coordinaten des Durchschnittes der letzteren sind dieselben x_0 und y_0 wie vorhin. Wenn zweitens C verschwindet, so kann z aus der Gleichung 1) und aus der Gleichung der Schnittebene

4) $$Ax + By = D$$

nicht eliminirt werden; durch Elimination von y erhält man in diesem Falle als Gleichung der Verticalprojection des Schnittes

$$\frac{x^2}{a} - \frac{(D - Ax)^2}{B^2b} = 2z$$

oder bei besserer Anordnung und unter Rücksicht auf den Umstand, dass Δ für $C = 0$ in $A^2a - B^2b$ übergeht,

$$z - \frac{D^2}{2\Delta} = -\frac{\Delta}{2B^2ab}\left(x - \frac{ADa}{\Delta}\right)^2.$$

Diese Gleichung repräsentirt eine Parabel so lange Δ nicht verschwindet; dagegen für $\Delta = 0$ ergiebt sich aus der vorhergehenden Form der Gleichung

$$z = \frac{ADa}{B^2b}x - \frac{Da^2}{2B^2b}$$

d. h. die Gleichung einer Geraden. Der Fall $\Delta = 0$ tritt ein für $A^2 a = B^2 b$ oder

$$\frac{A}{B} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

d. h. wenn die Ebene 4) parallel zu einer von den Geraden liegt, welche die Horizontalspur der Fläche bilden. Uebertragen wir nun diese für die Projectionen des Schnittes gegebenen Entscheidungen auf den Schnitt selber, so gelangen wir zu folgendem Gesammtresultate: Die zur Achse der Fläche nicht parallele Ebene 2) schneidet die Fläche in einer Hyperbel, deren Mittelpunktscoordinaten

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \qquad y_0 = +\frac{Bb}{C}, \qquad z_0 = \frac{\Delta - CD}{C^2}$$

sind, für $\Delta = 0$ degenerirt dieselbe in ein System von zwei Geraden, die sich im Punkte

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \qquad y_0 = +\frac{Bb}{C}, \qquad z_0 = -\frac{D}{C}$$

schneiden. Eine zur Flächenachse parallele (verticale) Ebene schneidet das Paraboloid in einer Parabel, welche zu einer Geraden wird, wenn die Schnittebene eine parallele Lage zu der einen oder anderen von den Geraden erhält, die zusammen die Horizontalspur der Fläche ausmachen. Elliptische Schnitte des hyperbolischen Paraboloides sind nicht vorhanden.

Die Eigenthümlichkeit, dass die Fläche in geraden Linien geschnitten werden kann, oder mit anderen Worten, dass sich auf der Fläche Gerade ziehen lassen, möge noch einer besonderen Erörterung unterworfen werden. Wenn eine durch die Gleichungen

$$5) \qquad x = Mz + u, \qquad y = Nz + v$$

charakterisirte Gerade ganz in der Fläche enthalten sein soll, so müssen alle den vorstehenden Gleichungen genügenden x, y, z auch die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

befriedigen und demnach muss für alle z

$$\frac{(Mz+u)^2}{a} - \frac{(Nz+v)^2}{b} - z = 0$$

oder

$$\left(\frac{M^2}{a} - \frac{N^2}{b}\right) z^2 + 2\left(\frac{Mu}{a} - \frac{Nv}{b} - 1\right) z + \frac{u^2}{a} - \frac{v^2}{b} = 0$$

sein. Dies ist nur möglich unter den Bedingungen

$$\frac{u^2}{a} - \frac{v^2}{b} = 0,$$

$$\frac{Mu}{a} - \frac{Nv}{b} - 1 = 0, \qquad \frac{M^2}{a} - \frac{N^2}{b} = 0;$$

durch die erste derselben wird ausgedrückt, dass die fragliche Linie eine von den beiden Geraden schneiden muss, welche die Horizontalspur der Fläche bilden, was vorauszusehen war. Substituiren wir die sich ergebenden Werthe

$$v = u\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ oder } v = -u\sqrt{\frac{b}{a}}$$

in die beiden übrigen Bedingungsgleichungen, so erhalten wir entweder

$$M = \frac{a}{2u}, \qquad N = -\frac{\sqrt{ab}}{2u},$$

oder

$$M = \frac{a}{2u}, \qquad N = +\frac{\sqrt{ab}}{2u}.$$

Wegen des willkührlich bleibenden u existiren demnach zwei verschiedene Systeme von Geraden auf der Fläche; die Gleichungen der Geraden des einen Systemes stehen unter der Form

$$6) \qquad x = \frac{u}{2u} z + u, \qquad y = -\frac{\sqrt{ab}}{2u} z + u\sqrt{\frac{b}{a}},$$

die des anderen Systemes dagegen unter der Form

$$7) \qquad x = \frac{a}{2u} z + u, \qquad y = +\frac{\sqrt{ab}}{2u} z - u\sqrt{\frac{b}{a}}$$

oder auch, wenn man zur besseren Unterscheidung u_1 für u setzt

$$8) \qquad x = \frac{a}{2u_1} z + u_1, \qquad y = +\frac{\sqrt{ab}}{2u_1} z - u_1\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Aus den Gleichungen 6) und 8) leitet man ohne Mühe den bemerkenswerthen Satz ab, dass jede Gerade des einen Systemes alle Geraden des anderen Systemes schneidet, und dass keine Gerade des einen Systemes einer Geraden des anderen Systemes parallel ist. Die Gleichungen 6) geben ferner durch Elimination von z

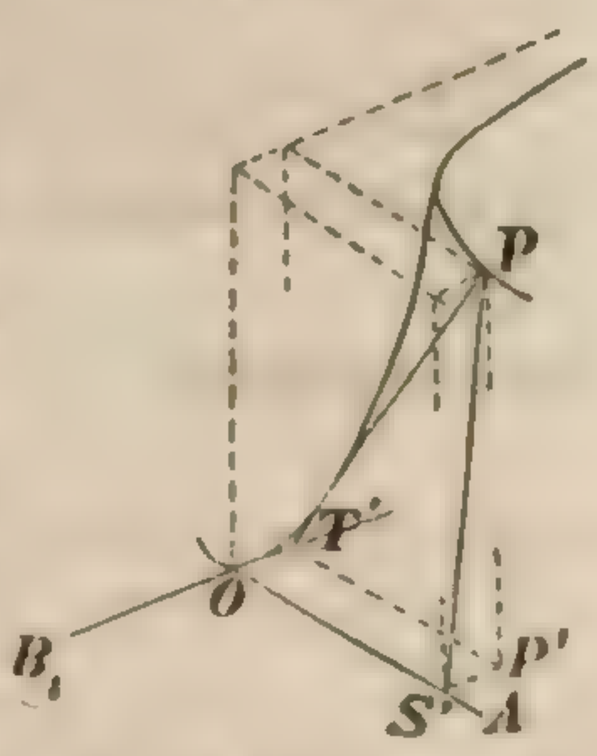
$$y = -\sqrt{\frac{b}{a}}(x - 2u)$$

und die Gleichungen 8)

$$y = +\sqrt{\frac{b}{a}}(x - 2u_1);$$

dies heisst geometrisch, die Horizontalprojectionen der Geraden des einen Systemes sind parallel zu der einen von den beiden Geraden, welche die Horizontalspur der Fläche bilden, in gleicher Weise liegen die Horizontalprojectionen der Geraden des anderen Systemes parallel zur anderen jener Geraden. Will man demnach durch irgend einen Punkt P der Fläche die zwei in P sich schneidenden Geraden der Fläche ziehen, so braucht man nur durch P zwei verticale Ebenen zu legen, deren Horizontalspuren parallel zu AB und A_1B_1 sind; diese Ebenen schneiden das hyperbolische Paraboloid in den beiden verlangten Geraden (in der Figur PS' und PT').

Fig. 41.



Zu demselben Resultate gelangt man durch eine Transformation der Gleichung 1). Wählt man nämlich die Geraden OA, OB, OZ zu Coordinatenachsen eines neuen Systemes der x', y', z', so geschieht der Uebergang zu demselben mittelst der Formeln

$$x = (x' + y')\cos\alpha, \qquad y = (x' - y')\sin\alpha, \qquad z = z',$$

und die Gleichung 1) verwandelt sich hierbei in

$$\frac{(x' + y')^2\cos^2\alpha}{a} - \frac{(x' - y')^2\sin^2\alpha}{b} = z$$

Vermöge der Werthe von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$, welche aus der Formel

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

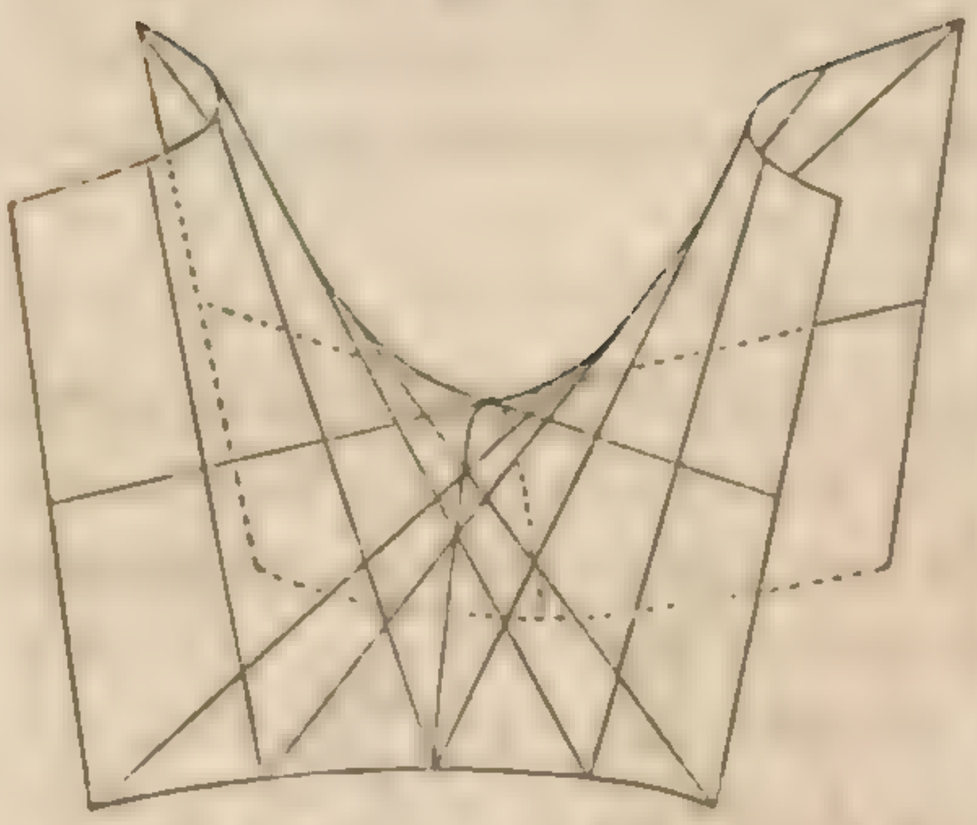
leicht herzuleiten sind, verschwinden die Coefficienten von x'^2 und y'^2, so dass nur übrig bleibt

$$\frac{2x'y'}{a+b} = z'$$

oder wenn das arithmetische Mittel zwischen den Halbparametern mit c bezeichnet wird,

9) $$x'y' = cz'.$$

Fig. 42.



Giebt man entweder dem y' oder dem x' einen constanten Werth, so erhält man jedesmal die Gleichung einer Geraden, was geometrisch bedeutet, dass die Fläche von jeder Ebene geradlinig geschnitten wird, welche einer der Coordinatenebenen AOZ und BOZ parallel liegt. Die Figur zeigt eine Partie derartiger Schnitte.

Eine Ebene, welche zwei durch einen Punkt gehende Gerade der Fläche enthält, ist eine von den Ebenen, deren Gleichungen

$$Ax + By + Cz = D$$

der Bedingung

$$A^2a - B^2b + 2CD = 0$$

genügen, wobei die Coordinaten jenes Punktes durch

$$-\frac{Aa}{C}, \qquad +\frac{Bb}{C}, \qquad -\frac{D}{C}$$

ausgedrückt werden können. Legt man ferner eine Ebene in der Entfernung $-\frac{D}{C}$ parallel zur xy-Ebene, so schneidet sie die Fläche in einer durch die Gleichung

$$10)\quad \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{x^2}{a_1^2} = 1, \qquad b_1 = \sqrt{\frac{2bD}{C}}, \qquad a_1 = \sqrt{\frac{2aD}{C}}$$

repräsentirten Hyperbel und die vorige Ebene in einer Geraden, deren Gleichung ist

$$Aa + By - D = D$$

oder

$$11)\quad B_1y + A_1x = 1, \qquad B_1 = \frac{B}{2D}, \qquad A_1 = \frac{A}{2D};$$

vermöge dieser Werthe ergiebt sich

$$B_1^2b_1^2 - A_1^2a_1^2 = 1,$$

und diese Relation lässt erkennen, dass die Gerade 11) den hyperbolischen Querschnitt 10) berührt. Auf ähnliche Weise kann man eine noch allgemeinere Eigenschaft der Ebene finden, welche zwei Gerade der Fläche enthält; legt man nämlich durch denselben Punkt wie vorhin einen beliebigen Schnitt s der Fläche, dessen Ebene von selbst die genannte Ebene in einer Geraden g schneidet,

so ist letztere jedesmal Tangente an s. Demgemäss muss die Ebene zweier in P zusammentreffender Geraden der Fläche als Inbegriff aller durch P gehenden Tangenten der Fläche d. h. als Berührungsebene in diesem Punkte gelten.

Daran knüpft sich die Bestimmung der Berührungsebene für einen gegebenen Punkt xyz der Fläche. Bezeichnen wir die Gleichung der verlangten Ebene mit

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D,$$

so müssen, dem Vorigen zufolge die Bedingungen

$$A^2a - B^2b + 2CD = 0,$$

$$x = -\frac{Aa}{C}, \qquad y = +\frac{Bb}{C}, \qquad z = -\frac{D}{C}$$

erfüllt sein. Die letzten drei Gleichungen geben A, B, D durch C ausgedrückt und diese Werthe genügen der ersten Bedingung vermöge des Umstandes, dass der Punkt xyz auf der Fläche liegt. Demnach erhalten wir als Gleichung der Tangentialebene

$$-\frac{x}{a}\xi + \frac{y}{b}\eta + \zeta = -z$$

oder

$$\frac{x}{az}\xi - \frac{y}{bz}\eta - \frac{1}{z}\zeta = 1.$$

Daraus folgen noch die beiden Gleichungen

$$13)\quad \xi - x = -\frac{x}{a}(\zeta - z), \qquad \eta - y = +\frac{y}{b}(\zeta - z),$$

welche für die im Punkte xyz errichtete Normale gelten.

§. 42.

Unterscheidungszeichen für die Flächen zweiten Grades.

Nachdem wir die Gestalten der verschiedenen Flächen zweiten Grades näher kennen gelernt haben, kehren wir zu der allgemeinen Gleichung

$$1)\quad \left\{\begin{array}{c} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0 \end{array}\right.$$

zurück um die Mittel zu erörtern, mittelst deren man rasch entscheiden kann, welche individuelle Fläche zweiten Grades in jedem speciellen Falle (d. h. bei gegebenen Werthen von $A, B, \ldots K$) durch die vorige Gleichung charakterisirt wird. Diese Mittel sind zwar in den §§. 34, 35 und 36 vollständig enthalten und man würde in der That durch Ausführung aller dort angedeuteten Rechnungen

auf eine der fünf in Nr. 33) und 34) aufgestellten Normalformen kommen, wodurch sich die Lage und Grösse der Achsen oder Parameter und die Natur der Fläche unmittelbar ergeben, dagegen ist aber nicht zu leugnen, dass dieser Calcul fast immer, und namentlich wenn die Gleichung 1) auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem bezogen ist, nicht geringe Weitläufigkeiten verursacht. Um diesen zu entgehen vereinfachen wir die Untersuchung dadurch, dass wir auf die Angabe der Lage und Grösse der Achsen oder Parameter verzichten und nur eine kurze Entscheidung über die Natur der Fläche verlangen. Zufolge der bereits bekannten Eigenschaften der einzelnen Flächen zweiten Grades lässt sich eine solche Discussion auf folgende schematische Zusammenstellung gründen; eine Fläche zweiten Grades kann sein:

I. Eine centrale Fläche;

1) eine geschlossene Fläche:
   das Ellipsoid,
2) eine nicht geschlossene Fläche und zwar
   a) eine geradlinige Fläche:
      das einfache Hyperboloid,
      der elliptische Kegel,
      der elliptische Cylinder,
      der hyperbolische Cylinder,
   b) eine nicht geradlinige Fläche:
      das getheilte Hyperboloid;

II. Eine nichtcentrale Fläche;

   a) eine geradlinige Fläche:
      das hyperbolische Paraboloid,
      der parabolische Cylinder,
   b) eine nichtgeradlinige Fläche:
      das elliptische Paraboloid.

Demgemäss hat man erstens zu untersuchen, ob sich ein Punkt finden lässt, welcher die durch ihn gehenden Sehnen der Fläche halbirt; die Existenz oder Nichtexistenz desselben entscheidet, ob die Fläche zur Classe I. oder zur Classe II. gehört. Findet das Erste statt, so kann immer leicht ermittelt werden, ob ohne Ausnahme jede durch den Mittelpunkt gelegte Gerade die Fläche zweimal in endlichen Entfernungen schneidet oder nicht; im ersten Falle ist die Fläche ein Ellipsoid, im zweiten Falle gehört sie zur Unterabtheilung 2. Um hier weiter zu trennen untersucht

man, wie in §. 38, ob es gerade Linien giebt, von denen jeder Punkt auf der Fläche liegt; das Vorhandensein derartiger Geraden zeigt, dass die Fläche zur Abtheilung *a* gehört; sind die Geraden parallel, so ist die Fläche ein Cylinder, über dessen Natur irgend ein Querschnitt Auskunft giebt, vereinigen sich die Geraden in einem Punkte, so ist die Fläche ein elliptischer Kegel, findet keine dieser Lagen statt, so ist die Fläche ein einfaches Hyperboloid; das Nichtvorhandensein jener Geraden beweist, dass die Fläche ein getheiltes Hyperboloid ist. Wenn ferner die Fläche keinen Mittelpunkt besitzt, so bedarf es nur der Untersuchung, ob gerade Linien auf ihr gezogen werden können oder nicht; im ersten Falle sind dieselben entweder parallel, und dann ist die Fläche ein parabolischer Cylinder, oder nicht parallel, mithin die Fläche ein hyperbolisches Paraboloid; wenn dagegen keine Geraden auf der Fläche liegen, so ist letztere ein elliptisches Paraboloid.

Wie man diese Untersuchung auszuführen hat, wollen wir erst im Allgemeinen und dann an einigen speciellen Gleichungen zeigen. — Verschieben wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach einem Punkte, dessen primitive Coordinaten u, v, w sind, so haben wir in der Gleichung 1)

$$x = x' + u, \qquad y = y' + v, \qquad z = z' + w$$

zu setzen und erhalten dann

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dx'y' + 2Ex'z' + 2Fy'z' \\ \quad + 2(Au + Dv + Ew + G)\,x' \\ \quad + 2(Du + Bv + Fw + H)\,y' \\ \quad + 2(Eu + Fv + Cw + I)\,z' \\ + Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Duv + 2Euw + 2Fvw \\ \quad + 2Gu + 2Hv + 2Iw + K = 0. \end{array}\right.$$

Die vor der Hand noch beliebigen Grössen u, v, w bestimmen wir so, dass sie den drei Bedingungen

$$3)\quad \left\{\begin{array}{l} Au + Dv + Ew + G = 0, \\ Du + Bv + Fw + H = 0, \\ Eu + Fv + Cw + I = 0, \end{array}\right.$$

genügen; aus der Gleichung 2) fallen dann die Glieder heraus, welche x', y', z' in der ersten Dimension enthalten und es bleibt

$$4)\quad Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dx'y' + 2Ex'z' + 2Fy'z' + \Sigma = 0$$

übrig, wobei zur Abkürzung

$$5)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Duv + 2Euw + 2Fvw \\ \quad + 2Gu + 2Hv + 2Iw + K \end{array}\right.$$

gesetzt worden ist. Diese Transformation würde jedoch in dem Falle unausführbar sein, wo die Gleichungen 3) keine endlichen Werthe von u, v, w liefern, und um hierüber entscheiden zu können, entwickeln wir u, v, w auf gewöhnlichem algebraischen Wege; dies giebt:

$$u = -\frac{G(F^2-BC)+H(CD-EF)+I(BE-DF)}{AF^2+BE^2+CD^2-ABC-2DEF},$$

$$v = -\frac{G(CD-EF)+H(E^2-AC)+I(AF-DE)}{AF^2+BE^2+CD^2-ABC-2DEF},$$

$$w = -\frac{G(BE-DF)+H(AF-DE)+I(D^2-AB)}{AF^2+BE^2+CD^2-ABC-2DEF}.$$

Ist nun der gemeinschaftliche Nenner dieser Brüche, welchen wir durch

$$6) \qquad \Delta = AF^2+BE^2+CD^2-ABC-2DEF$$

bezeichnen wollen, von Null verschieden, so erhalten u, v, w endliche bestimmte Werthe, dagegen würde für $\Delta = 0$ jeder der obigen Brüche entweder $= \infty$ oder, falls die Zähler verschwänden, $= \frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt werden, unter welchen Umständen die beabsichtigte Transformation unterbleiben muss. Diese Unterscheidungen haben übrigens einen geometrischen Sinn. Betrachtet man nämlich den Punkt uvw als einen vor der Hand noch unbestimmten, so charakterisirt jede der Gleichungen 3), einzeln genommen, eine Ebene, und alle drei Gleichungen zusammen bestimmen den Durchschnitt jener drei einzelnen Ebenen. Dieser Punkt existirt nicht, wenn sich jene Ebenen in parallelen Geraden schneiden, er wird unbestimmt, sobald zwei oder drei Ebenen zusammenfallen. Wir untersuchen jetzt die möglichen Fälle einzeln.

I. Erster Hauptfall: $\Delta \gtrless 0$. Geben wir dem Ausdrucke Σ die Form

$$\begin{aligned}\Sigma = &(Au+Dv+Ew+G)u\\ &+(Du+Bv+Fw+H)v\\ &+(Eu+Fv+Cw+I)w\\ &+Gu+Hv+Iw+K,\end{aligned}$$

so wird derselbe vermöge der Gleichungen 3) einfacher, nämlich

$$\Sigma = Gu+Hv+Iw+K$$

und hier können die oben angegebenen Werthe von u, v, w leicht substituirt werden. Zur Abkürzung sei

$$7)\quad \begin{cases} \Gamma = G^2(F^2 - BC) + H^2(E^2 - AC) + I^2(D^2 - AB) \\ \quad + 2GH(CD - EF) + 2GI(BE - DF) + 2HI(AF - DE) - K\Delta, \end{cases}$$

es ergiebt sich dann

$$\Sigma = -\frac{\Gamma}{\Delta}$$

mithin als Gleichung der Fläche, bezogen auf das neue Coordinatensystem,

$$8)\quad Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dx'y' + 2Ex'z' + 2Fy'z' = \frac{\Gamma}{\Delta}.$$

Legen wir durch den neuen Anfangspunkt eine Gerade, deren Gleichungen

$$9)\qquad x' = \alpha z', \qquad y' = \beta z'$$

sein mögen, so finden wir die Coordinaten ihres Durchschnittes mit der Fläche durch Verbindung der Gleichungen 8) und 9); dabei sei zur Abkürzung

$$10)\quad \Omega = A\alpha^2 + B\beta^2 + C + 2D\alpha\beta + 2E\alpha + 2F\beta,$$

für die Coordinaten des Durchschnittes haben wir dann

$$11)\quad x' = \pm\alpha\sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}},\quad y' = \pm\beta\sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}},\quad z' = \pm\sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}}.$$

Aus den doppelten Vorzeichen von x', y', z' erkennt man, dass die Gerade und die Fläche sich im Allgemeinen in zwei Punkten schneiden, deren Entfernungen vom neuen Coordinatenanfange gleich gross und entgegengesetzten Vorzeichens sind; der neue Coordinatenanfang, d. h. der primitive Punkt uvw ist folglich der Mittelpunkt der Fläche, und der Hauptfall $\Delta \gtrless 0$ umfasst demnach alle centralen Flächen.

Denkt man sich in den Gleichungen 9) und 10) die Coefficienten α und β als veränderlich, so erhält die durch den Mittelpunkt gehende Gerade alle möglichen verschiedenen Lagen und es muss nun entschieden werden, ob sie die Fläche unter allen Umständen schneidet oder nicht. Die fraglichen Durchschnitte sind aber so lange reell, als $\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}$ nicht negativ wird und da hier Ω eine veränderliche Grösse bedeutet, so bedarf es zunächst einer Untersuchung über das Vorzeichen von Ω. Hierbei sind nur zwei Fälle möglich: entweder behält Ω für alle α und β das nämliche Zeichen oder es wechselt dasselbe in der Weise, dass Ω für gewisse α und

β positiv, für andere α und β negativ ist. Nach einem bekannten Satze*) findet das Erste statt, wenn gleichzeitig

$$D^2 - AB \text{ negativ}$$

und

$$(D^2 - AB)(E^2 - AC) - (DE - AF)^2 \text{ positiv}$$

ausfällt; der letztere Ausdruck ist einerlei mit $-AA$, setzen wir also A ein für alle Mal als positiv voraus, wodurch die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beschränkt wird, so behält Ω sein Vorzeichen, wenn die Bedingungen

$$D^2 - AB < 0 \text{ und } \Delta < 0$$

gleichzeitig erfüllt sind. Das Vorzeichen von Ω ist dann einerlei mit dem Vorzeichen von

$$\alpha^2 \left(A + B\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{C}{\alpha^2} + 2D\frac{\beta}{\alpha} + 2\frac{E}{\alpha} + 2F\frac{\beta}{\alpha^2} \right)$$

und da man hier, ohne das Zeichen zu ändern, $\beta = 0$ und $\alpha = \infty$ setzen darf, so hat Ω das nämliche Vorzeichen, wie $\alpha^2 A$, ist also positiv. Wir betrachten nun die Fälle einzeln, ob Ω sein (positives) Zeichen behält oder wechselt.

1. Sind die Bedingungen

$$D^2 - AB < 0, \qquad \Delta < 0$$

gleichzeitig erfüllt, mithin Ω positiv, so setze man $\Delta = -\delta$, wo δ den absoluten Werth von Δ bezeichnet; es ist dann

$$x' = \pm\alpha\sqrt{\frac{\Gamma}{-\delta\Omega}}, \quad y' = \pm\beta\sqrt{\frac{\Gamma}{-\delta\Omega}}, \quad z' = \pm\sqrt{\frac{\Gamma}{-\delta\Omega}},$$

und hieraus ergiebt sich sofort, dass bei positiven Γ kein reeller Durchschnitt existirt, wie man auch α und β wählen möge, dass

---

*) Die Richtigkeit der obigen Angabe ersieht man aus folgender Betrachtung. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes, so charakterisirt die Gleichung

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C + 2D\xi\eta + 2E\xi + 2F\eta = \zeta$$

eine Fläche zweiten Grades, welche keinen Mittelpunkt besitzt, weil ζ nur in der ersten Potenz vorkommt. Diese Fläche kann entweder ganz auf der einen Seite der $\xi\eta$-Ebene liegen oder die $\xi\eta$-Ebene schneiden; im ersten Falle behält ζ für alle ξ und η das nämliche Vorzeichen, im zweiten Falle giebt es sowohl positive als negative ζ. Soll nun das Erste statt finden, so muss der Durchschnitt der Fläche mit $\xi\eta$-Ebene imaginär, mithin die Gleichung

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C + 2D\xi\eta + 2E\xi + 2F\eta = 0$$

so beschaffen sein, dass sie durch reelle ξ und η unerfüllbar ist. Man erhält durch Auflösung der Gleichung

ferner für $\Gamma = 0$ beide Durchschnitte in den neuen Coordinatenanfang zusammenfallen, dass endlich für negative Γ jederzeit zwei in endlichen Entfernungen befindliche Durchschnitte vorhanden sind. Die Gleichung 8) oder 1) bedeutet demnach

für $\Gamma > 0$ kein geometrisches Gebild,

„ $\Gamma = 0$ einen einzelnen Punkt (uvw),

„ $\Gamma < 0$ ein Ellipsoid.

2. Wenn die Bedingungen

$$D^2 - AB < 0, \qquad \Delta < 0$$

nicht gleichzeitig erfüllt sind, so wechselt Ω sein Vorzeichen, indem es durch Null hindurchgeht. Es giebt dann eine Reihenfolge von α und β, für welche $\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}$ positiv ausfällt, ferner gewisse Paare von α und β für welche $\frac{\Gamma}{\Delta\Omega} = \frac{1}{0} = \infty$ wird, und dann unendlich viel Werthe von α und β, welche $\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}$ negativ machen. Die Fläche erstreckt sich daher jedenfalls ins Unendliche und gehört folglich unter die Hyperboloide.

Um zu entscheiden, ob die Fläche ein einfaches oder ein getheiltes Hyperboloid ist, versuchen wir eine durch die Gleichungen

$$x' = Mz' + p, \qquad y' = Nz' + q$$

dargestellte Gerade so zu legen, dass jeder ihrer Pnnkte mit einem Punkte der Fläche zusammenfällt. Die Substitution der Werthe von x' und y' in die Gleichung 8) giebt

---

$$\xi = \frac{D\eta + E}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{(D\eta + E)^2 - A(C + 2F\eta + B\eta^2)};$$

der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck kann in der Form

$$(D^2 - AB)\left\{\left(\eta + \frac{DE - AF}{D^2 - AB}\right)^2 + \frac{(D^2 - AB)(E^2 - AC) - (DE - AF)^2}{(D^2 - AB)^2}\right\}$$

dargestellt werden und ist für alle η negativ, wenn der Factor $D^2 - AB$ negativ und der Parentheseninhalt positiv ausfällt, was Letzteres unter der Bedingung

$$(D^2 - AB)(E^2 - AC) - (DE - AF)^2 > 0$$

der Fall ist. Finden beide Umstände statt, so gehört zu jedem reellen η ein imaginäres ξ, die Fläche schneidet die $\xi\eta$-Ebene nicht und ζ behält stets dasselbe Vorzeichen. Diese Ergebnisse stimmen mit dem oben Erwähnten überein, wenn man ξ, η, ζ durch α, β, Ω ersetzt.

$$(AM^2+BN^2+C+2DMN+2EM+2FN)\,z'^2$$
$$+2\{(AM+DN+E)p+(BN+DM+F)q\}\,z'$$
$$+Ap^2+Bq^2+2Dpq=\frac{\Gamma}{\Delta}$$

und wenn diese Gleichung für alle z' bestehen soll, so gehören dazu die drei Bedingungen

$$12)\quad\begin{cases} AM^2+BN^2+C+2DMN+2EM+2FN=0,\\ (AM+DN+E)p+(BN+DM+F)q=0,\\ Ap^2+Bq^2+2Dpq=\dfrac{\Gamma}{\Delta}. \end{cases}$$

Der zweiten Gleichung entnehmen wir den Werth von q und substituiren ihn in die dritte, wobei zur Abkürzung

$$13)\quad AM+DN+E=P,\qquad BN+DM+F=Q$$

sein möge; es ergiebt sich auf diese Weise

$$(AQ^2+BP^2-2DPQ)\,p^2=\frac{\Gamma}{\Delta}\,Q^2,$$

und auf ähnliche Weise, wenn man den Werth von p aus der zweiten in die dritte Gleichung einsetzt,

$$(AQ^2+BP^2-2DPQ)\,q^2=\frac{\Gamma}{\Delta}\,P^2.$$

Vermöge der Bedeutung von P und Q findet man leicht durch gewöhnliche Ausrechnung

$$AQ^2+BP^2-2DPQ$$
$$=(A^2B-AD^2)M^2+(AB^2-BD^2)N^2+2(ABD-D^3)MN$$
$$+2(ABE-D^2E)M+2(ABF-D^2F)N$$
$$+AF^2+BE^2-2DEF$$

d. i., wenn man die positiven und negativen Glieder in der ersten und zweiten Reihe zusammenfasst,

$$=(AB-D^2)\,(AM^2+BN^2+2DMN+2EM+2FN)$$
$$+AF^2+BE^2-2DEF;$$

nach der ersten Gleichung in Nr. 12) und nach Nr. 6) hat man weiter

$$AQ^2+BP^2-2DPQ$$
$$=(AB-D^2)\,(-C)+\Delta+ABC-CD^2=\Delta.$$

Hierdurch vereinfachen sich die früheren Gleichungen und werden

$$14)\qquad \Delta^2p^2=\Gamma Q^2,\qquad \Delta^2q^2=\Gamma P^2.$$

Denkt man sich p und q so gewählt, dass sie der dritten Gleichung in Nr. 12) genügen d. h. geometrisch, nimmt man irgend einen Punkt der Horizontalspur der Fläche als Horizontalspur der ver-

langten Geraden, so dienen die Gleichungen 14) zur Bestimmung von P und Q, woraus nachher M und N mittelst der Gleichungen 13) folgen. Die Werthe von P und Q, sowie die nachherigen von M und N sind nun reell und zweideutig bei positiven Γ, es können daher in diesem Falle durch jeden Punkt der Horizontalspur unserer Fläche zwei Gerade auf letzterer gezogen werden; für $\Gamma = 0$ folgt aus Nr. 14) $p = 0$ und $q = 0$ während M und N an die erste Bedingungsgleichung in Nr. 12) gebunden bleiben, in diesem Falle sind auf der Fläche wiederum unendlich viel gerade Linien möglich, welche aber sämmtlich durch den Coordinatenanfang gehen; für negative Γ werden P und Q mithin auch M und N imaginär. Diesen Erörterungen zufolge bedeutet die Gleichung 8) oder 1)

für $\Gamma > 0$ ein einfaches Hyperboloid,
für $\Gamma = 0$ einen elliptischen Kegel,
für $\Gamma < 0$ ein getheiltes Hyperboloid.

II. Zweiter Hauptfall: $\Delta = 0$. Wir müssen hier gleich unterscheiden, ob die drei Zähler der Werthe von u, v, w, nämlich die Grössen

$$15)\quad \begin{cases} A_1 = G(F^2 - BC) + H(CD - EF) + I(BE - DF), \\ A_2 = G(CD - EF) + H(E^2 - AC) + I(AF - DE), \\ A_3 = G(BE - DF) + H(AF - DE) + I(D^2 - AB), \end{cases}$$

von Null verschieden sind, oder ob eine oder mehrere derselben verschwinden.

1. Wenn keiner der Ausdrücke A_1, A_2, A_3 verschwindet, so werden die Coordinaten des Mittelpunktes unendlich und es kann daher die vorige Transformation nicht ausgeführt werden. In diesem Falle vereinfachen wir die Gleichung 2) dadurch, dass wir die Coefficienten von x', y', und den von x', y', z' freien Ausdruck wegschaffen, indem wir

$$16)\quad \begin{cases} Au + Dv + Ew + G = 0, \\ Du + Bv + Fw + H = 0, \\ Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Duv + 2Euw + 2Fvw \\ \qquad + 2Gu + 2Hv + 2Iw + K = 0 \end{cases}$$

setzen und hieraus u, v, w bestimmnn. Dies geschieht auf folgende Weise. Wir geben der letzten Gleichung die Form:

$$(Au + Dv + Ew + G)u + (Du + Bv + Fw + H)v + Cw^2 + Euw + Fuw + Gu + Hv + 2Iw + K = 0,$$

welche, den beiden ersten Gleichungen zufolge, auf

$$Cw^2 + Euw + Fuw + Gu + Hv + 2Iw + K = 0$$

zurückkommt, und setzen darin die aus den beiden ersten Bedingungsgleichungen fliessenden Werthe

$$17)\quad u = \frac{(BE-DF)w+BG-DH}{D^2-AB},\quad v = \frac{(AF-DE)w+AH-DG}{D^2-AB};$$

nach gehöriger Reduction findet sich

$$\begin{gathered}[C(D^2-AB)+E(BE-DF)+F(AF-DE)]w^2\\ +2[G(BE-DF)+H(AF-DE)+I(D^2-AB)]w\\ +AH^2+BG^2-2DGH+K(D^2-AB).\end{gathered}$$

Der Coefficient von w^2 ist aber einerlei mit Δ und ebendesswegen $=0$; die vorige Gleichung liefert daher im Allgemeinen einen endlichen bestimmten Werth für w, den wir mit

$$18)\qquad w = -\frac{\varkappa}{2\Delta_3}$$

bezeichnen wollen, aus ihm ergeben sich nach Nr. 17) bestimmte Werthe von u und v wenn D^2-AB von Null verschieden ist, was wir für jetzt voraussetzen. Die Gleichung 2) erhält nun die Form

$$19)\quad Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dx'y'+2Ex'z'+2Fy'z'+2Lz'=0,$$

worin zur Abkürzung

$$Eu+Fv+Cw+I = L$$

gesetzt worden ist, und es bedarf der Untersuchung, ob dieselbe ein elliptisches oder ein hyperbolisches Paraboloid bedeutet. Zu diesem Zwecke versuchen wir eine durch die Gleichungen

$$x' = Mz'+p,\qquad y' = Nz'+q$$

charakterisirte Gerade so zu legen, dass jeder ihrer Punkte zugleich ein Punkt der Fläche ist. Nach Substitution der Werthe von x' und y' wird aus der Gleichung 19) die folgende:

$$\begin{gathered}(AM^2+BN^2+C+2DMN+2EM+2FN)z'^2\\ +2[(AM+DN+E)p+(BN+DM+F)q+L]z'\\ +Ap^2+Bq^2+2Dpq=0,\end{gathered}$$

und diese kann für alle möglichen z' nur bestehen wenn die Bedingungen

$$20)\quad\begin{cases} AM^2+BN^2+C+2DMN+2EM+2FN=0,\\ (AM+DN+E)p+(BN+DM+F)q+L=0,\\ Ap^2+Bq^2+2Dpq=0\end{cases}$$

gleichzeitig erfüllt sind. Die letzte Gleichung giebt:

$$p = \frac{-D\pm\sqrt{D^2-AB}}{A}q$$

und lässt augenblicklich erkennen, dass nur bei positiven D^2-AB

eine unendliche Menge reeller p und q möglich ist. Wäre dagegen $D^2 - AB$ negativ, so würde der vorstehenden Gleichung nur das eine reelle Werthepaar $p = 0$ und $q = 0$ genügen, vermöge dessen die zweite Gleichung in Nr. 20) zu

$$L = 0$$

wird; dieses Ergebniss widerspricht aber der Voraussetzung $\Delta = 0$ insofern, als die Gleichung 19) für $L = 0$ offenbar eine centrale Fläche (einen elliptischen Kegel) bedeuten würde. Demnach ist die dritte Gleichung in Nr. 20) bei negativen $D^2 - AB$ unmöglich also die Fläche nicht geradlinig. Aus diesen Erörterungen folgt, dass die Gleichung 19) oder 1)

für $D^2 - AB < 0$ ein elliptisches Paraboloid,

für $D^2 - AB > 0$ ein hyperbolisches Paraboloid

charakterisirt. Dasselbe Resultat ergiebt sich noch etwas kürzer vermöge der Bemerkung, dass ein elliptisches Paraboloid nicht in einer Hyperbel und ein hyperbolisches nicht in einer Ellipse geschnitten werden kann, dass also bei einer nicht centralen Fläche ein einziger elliptischer Schnitt für das elliptische Paraboloid und ein einziger hyperbolischer Schnitt für das hyperbolische Paraboloid entscheidet. Für einen der $x'y'$-Ebene parallelen Schnitt hat man aber $z' = h$ und folglich die Gleichung

$$Ax'^2 + By'^2 + 2Dx'y' + 2Ehx' + 2Fhy' + Ch^2 + 2Lh = 0;$$

hält man sie mit der allgemeinen Kegelschnittgleichung

$$A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

zusammen, so ist

$$C'^2 - A'B' = D^2 - AB,$$

$$A'E'^2 + B'D'^2 + (C'^2 - A'B')F' - 2C'D'E'$$
$$= (AF^2 + BE^2 + CD^2 - ABC - 2DEF)h^2 + (D^2 - AB)Lh$$
$$= \Delta h^2 + (D^2 - AB)Lh = (D^2 - AB)Lh;$$

der letzte Ausdruck kann wegen des beliebigen h nach Willkühr positiv oder negativ gemacht werden, es sind daher für $C'^2 - A'B' = D^2 - AB < 0$ unendlich viel elliptische und für $C'^2 - A'B' = D^2 - AB > 0$ unendlich viel hyperbolische Schnitte möglich, was die nämliche Entscheidung wie oben giebt. Man ersieht gleichzeitig aus dieser Bemerkung wie der Fall $D^2 - AB = 0$ zu behandeln ist. Die vorige Transformation würde dann wegen der unendlich werdenden u und v (Nr. 17) nicht ausführbar sein, aber es bedarf derselben überhaupt nicht, wenn man gleich die Schnitte der Fläche mit verschiedenen zu den Coor-

dinatenebenen parallelen Ebenen betrachtet. Für $D^2 - AB = 0$ giebt zwar der Schnitt parallel zur xy-Ebene keine Entscheidung (weil parabolische Schnitte in beiden Paraboloiden verkommen) dagegen sind die Schnitte parallel zur xz-Ebene Ellipsen für $E^2 - AC < 0$ und Hyperbeln für $E^2 - AC > 0$; die Gleichung bedeutet daher

für $E^2 - AC < 0$ ein elliptisches Paraboloid,
für $E^2 - AC > 0$ ein hyperbolisches Paraboloid.

Auch dieses Kennzeichen würde seine Anwendbarkeit verlieren, wenn $E^2 - AC = 0$ mithin gleichzeitig $D^2 = AB$ und $E^2 = AC$ wäre; man hat in diesem Falle

$$\Delta = AF^2 + BAC - 2\sqrt{AB}.\sqrt{AC}.F$$
$$= A(F^2 + BC - 2F\sqrt{BC}) = A(F - \sqrt{BC})^2$$

und weil $\Delta = 0$, A aber > 0 vorausgesetzt ist,

$$F - \sqrt{BC} = 0 \text{ woraus } F^2 - BC = 0.$$

Schneidet man jetzt die Fläche durch eine der yz-Ebene parallele Ebene, so erhält man wegen der vorstehenden Gleichung einen parabolischen Schnitt und es sind folglich alle den Coordinatenebenen parallelen Schnitte Parabeln. Diess entscheidet bereits die Natur der Fläche; in beiden Paraboloiden sind nämlich nur die zur Achse parallelen Schnitte Parabeln, alle drei Coordinatenebenen können aber nicht gleichzeitig der Achse parallel sein, es ist folglich die Fläche kein Paraboloid, sondern ein parabolischer Cylinder, der in speciellen Fällen zu einer Ebene degeneriren kann. Das Resultat dieser Untersuchung lässt sich demnach so aussprechen: wenn die Differenzen

$$D^2 - AB, \quad E^2 - AC, \quad F^2 - BC$$

nicht gleichzeitig Null sind, so bedeutet die Gleichung 1) ein elliptisches oder ein hyperbolisches Paraboloid jenachdem die nicht verschwindenden Differenzen das negative oder positive Vorzeichen besitzen; sind aber jene Differenzen gleichzeitig Null, so ist die entsprechende Fläche im Allgemeinen ein parabolischer Cylinder.

2. Wenn zweitens eine oder mehrere der Grössen A_1, A_2, A_3 verschwinden, so erhalten die Mittelpunktscoordinaten, welche früher aus den Gleichungen

$$21)\quad \begin{cases} Au + Dv + Ew + G = 0 \\ Du + Bv + Fw + H = 0 \\ Eu + Fv + Cw + I = 0 \end{cases}$$

entwickelt wurden, keine völlig bestimmten Werthe und es ist diess ein Zeichen, dass die vorstehenden Gleichungen nicht sämmtlich von einander verschieden sind; die Fläche besitzt dann unendlich viele Mittelpunkte. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Die obigen drei Gleichungen können entweder auf zwei Gleichungen zurückkommen (wenn nämlich eine Gleichung eine Folge der beiden übrigen ist); sie repräsentiren dann zwei Ebenen und jeder Punkt auf der Durchschnittslinie der letzteren kann als Mittelpunkt betrachtet werden. Die Fläche ist in diesem Falle entweder ein elliptischer oder ein hyperbolischer Cylinder oder ein System von zwei sich schneidenden Ebenen. Hierüber geben die Schnitte der Fläche leicht Auskunft; ein einziger elliptischer Schnitt entscheidet für den elliptischen Cylinder, ein einziger hyperbolischer Schnitt für den hyperbolischen Cylinder; ist weder der eine noch der andere Schnitt möglich, so besteht die Fläche aus zwei sich schneidenden Ebenen. Ausserdem ist noch der zweite Fall möglich, dass die drei Gleichungen 21) auf eine Gleichung zurückkommen; sie repräsentiren dann eine Ebene, von welcher jeder Punkt als Mittelpunkt gelten kann. Die Fläche besteht in diesem Falle entweder aus zwei parallelen Ebenen, welche von der Ebene der Mittelpunkte gleich weit entfernt sind, oder aus einer einzigen Ebene (der Mittelpunktsebene selber); der letztere Umstand tritt ein, wenn die linke Seite das vollständige Quadrat eines Ausdruckes von der Form $A'x + B'y + C'z + D'$ ist.

Beispiele zu derartigen Untersuchungen enthält der nächste Paragraph.

§. 43.

Geometrische Oerter.

Nicht selten erzeugt man eine Fläche dadurch, dass man einen Punkt oder eine Gerade sich nach einem bestimmten Gesetze bewegen lässt; die Fläche ist dann der geometrische Ort des veränderlichen Punktes oder der Geraden. Einige bemerkenswerthe derartige Entstehungsweisen von Flächen zweiten Grades sind folgende.

1. Welche Fläche beschreibt ein Punkt, dessen Abstände von einer festen Ebene und von einer bestimmten Geraden in gegebenem Verhältnisse stehen?

Die feste Ebene sei die Coordinatenebene der xy, ihr Durchschnitt mit der Geraden der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, und die Ebene des Neigungswinkels der Geraden gegen die Ebene die xz-Ebene; die Gleichungen der Geraden sind unter dieser Voraussetzung

$$y = 0, \qquad z = Cx,$$

wo C die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels bedeutet. Ferner hat man für den Abstand p des beweglichen Punktes xyz von der Geraden nach Formel 19 auf Seite 42

$$p = \sqrt{\frac{y^2 + (Cx - z)^2 + (Cy)^2}{1 + C^2}},$$

und z als Abstand des Punktes xyz von der festen Ebene. Bezeichnet nun λ das constante Verhältniss $\frac{p}{z}$, so lautet die Gleichung der Fläche

$$\sqrt{\frac{y^2 + (Cx - z)^2 + (Cy)^2}{1 + C^2}} = \lambda z,$$

oder nach Wegschaffung des Wurzelzeichens und bei anderer Anordnung

$$C^2 x^2 + (1 + C^2) y^2 + [1 - \lambda^2 (1 + C^2)] z^2 - 2Cxz = 0.$$

Dieselbe erhält eine bessere Gestalt wenn man den Neigungswinkel ϑ einführt, also $C = tan\,\vartheta$ setzt, und nachher mit $cos^2\,\vartheta$ multiplicirt; es ergiebt sich

1) $\quad sin^2\,\vartheta \,.\, x^2 + y^2 + (cos^2\,\vartheta - \lambda^2)\, z^2 - 2\, sin\,\vartheta\, cos\,\vartheta \,.\, xz = 0.$

Aus den im vorigen Paragraphen unter I., 2, angeführten Kennzeichen folgt augenblicklich, dass der fragliche Ort eine elliptische Kegelfläche ist. Will man ihre Gleichung auf die gewöhnliche Form bringen, so muss man das mit xz behaftete Glied wegschaffen; diess geschieht dadurch, dass man das Coordinatensystem um die y-Achse dreht, also

$$x = x'\, cos\,\omega - z'\, sin\,\omega$$
$$z = x'\, sin\,\omega + z'\, cos\,\omega$$

setzt, wo ω den Drehungswinkel bezeichnet, und nachher ω so bestimmt, dass der Coefficient von $x'z'$ verschwindet; man findet

2) $$\tan 2\omega = \frac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta - \lambda^2}$$

und als Gleichung der Fläche

3) $[\sin^2(\vartheta-\omega) - \lambda^2 \sin^2\omega]\, x'^2 + y'^2 + [\cos^2(\vartheta-\omega) - \lambda^2\cos^2\omega]\, z'^2 = 0.$

Da schon bekannt ist, dass diese Gleichung eine Kegelfläche charakterisirt, so müssen die Coefficienten von x'^2 und z'^2 entgegengesetzte Vorzeichen haben; ist der erste Coefficient positiv, mithin der zweite negativ, so fällt die Kegelachse mit der z'-Achse zusammen; im entgegengesetzten Falle ist die x'-Achse die Kegelachse.

2. Ein Punkt bewegt sich so, dass seine Abstände von zwei festen nicht in einer Ebene liegenden Geraden ein bestimmtes Verhältniss zu einander haben; welcher ist der geometrische Ort des Punktes?

Die gemeinschaftliche Normale beider Geraden nehmen wir zur z-Achse und den Mittelpunkt ihrer Entfernung zum Coordinatenanfang; durch letzteren legen wir Parallelen zu den gegebenen Geraden, halbiren die Winkel zwischen diesen Parallelen und nehmen die auf einander und auf der z-Achse senkrechten Halbirungslinien zu Achsen der x und der y. In Beziehung auf dieses rechtwinklige Coordinatensystem sind (wie in §. 9 S. 30) die Gleichungen der beiden Geraden

$$y = Bx,\ z = c; \qquad y = -Bx,\ z = -c;$$

die Abstände des beweglichen Punktes xyz von beiden Geraden erhalten wir nach Formel 19) in §. 12 (S. 42):

$$p = \sqrt{\frac{(Bx-y)^2 + (c-z)^2 + [B(c-z)]^2}{1+B^2}},$$

$$q = \sqrt{\frac{(Bx+y)^2 + (c+z)^2 + [B(c+z)]^2}{1+B^2}};$$

bezeichnet nun λ das constante Verhältniss $\frac{q}{p}$, so ist $q^2 = \lambda^2 p^2$ mithin nach Substitution der Werthe von p und q, sowie bei Zusammenfassung der gleichartigen Grössen:

$$(1-\lambda^2)B^2x^2 + (1-\lambda^2)y^2 + (1-\lambda^2)(1+B^2)z^2$$
$$+ 2(1+\lambda^2)Bxy + 2(1+\lambda^2)(1+B^2)cz + (1-\lambda^2)(1+B^2)c^2 = 0.$$

Für $B = \tan\alpha$ und nach Multiplication mit $\cos^2\alpha$ ergiebt sich hieraus als Gleichung des gesuchten Ortes:

4) $$(1-\lambda^2)[\sin^2\alpha \,.\, x^2 + \cos^2\alpha \,.\, y^2 + z^2]$$
$$+ 2(1+\lambda^2)[\sin\alpha\cos\alpha \,.\, xy + cz] + (1-\lambda^2)c^2 = 0.$$

Hierbei sind zunächst die Fälle $\lambda = 1$ und $\lambda \gtrless 1$ zu unterscheiden.
Für $\lambda = 1$ erhält man

$$\sin\alpha\cos\alpha \,.\, xy + cz = 0$$

oder für $z = -z'$

$$5) \qquad xy = \frac{2c}{\sin 2\alpha} z',$$

die Fläche ist dann ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid (§. 41, Nr. 9); für $\lambda \gtrless 1$ giebt man der Gleichung 4) die Form:

$$6) \qquad \sin^2\alpha \,.\, x^2 + \cos^2\alpha \,.\, y^2 + z^2$$
$$+ 2\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\sin\alpha\cos\alpha \,.\, xy + 2\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} cz + c^2 = 0,$$

sie drückt in diesem Falle ein einfaches Hyperboloid aus. Will man die Gleichung desselben in der gewöhnlichen Form darstellen, so muss man das rechtwinklige Coordinatensystem um die z-Achse drehen und gleichzeitig längs der z-Achse verschieben indem man setzt

$$x = x' \cos\omega - y' \sin\omega,$$
$$x = x' \sin\omega + y' \cos\omega,$$
$$z = z' + k,$$

und dabei ω und k so wählen, dass die Coefficienten von $x'y'$ und z' verschwinden. Die hierzu nöthigen Werthe bestimmen sich durch die Formeln

$$7) \qquad \tan 2\omega = -\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\tan 2\alpha, \qquad k = -\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} c.$$

Im Fall sich beide Gerade schneiden wird das hyperbolische Paraboloid zu zwei Ebenen und das einfache Hyperboloid zu einem elliptischen Kegel.

3. Eine Gerade bewegt sich so, dass drei gegebene Punkte derselben auf drei festen in einem Punkte zusammentreffenden Ebenen bleiben; welche Fläche beschreibt ein vierter Punkt der Geraden?

Die vier gegebenen Punkte mögen der Reihe nach A, B, C, P heissen und ihre Abstände durch $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$ bestimmt sein; die gegebenen Ebenen wählen wir zu Coordinatenebenen und zwar in der Weise, dass der Punkt A auf der Ebene yz, B auf xz und C auf xy bleibt. Heissen ferner ξ, η, ζ die Coordinaten irgend eines Punktes der beweglichen Geraden (die sogenannten laufenden Coordinaten), und x, y, z die des Punktes P, so können die Gleichungen der Geraden in der Form

8) $\eta - y = M(\xi - x), \qquad \zeta - z = N(\xi - x)$

dargestellt werden, und die Punkte A, B, C sind nichts Anderes, als die Spuren dieser Geraden. Wir bezeichnen demgemäss

die Coordinaten von A mit $x''' = 0, \quad y''', \quad z''',$

„ „ „ B „ $x'', \quad y'' = 0, \quad z'',$

„ „ „ C „ $x', \quad y', \quad z' = 0,$

und haben, weil sie den Gleichungen 8) genügen müssen,

9) $$\begin{cases} y''' - y = -Mx, & z''' - z = -Nx, \\ x'' - x = -\frac{1}{M}y, & z'' - z = -\frac{N}{M}y, \\ x' - x = -\frac{1}{N}z, & y' - y = -\frac{M}{N}z. \end{cases}$$

Für die Entfernung der Punkte A und P, d. h. $x'''y'''z'''$ und xyz gilt nun der Aufgabe zufolge die Gleichung

$$(x''' - x)^2 + (y''' - y)^2 + (z''' - z)^2 + 2(x''' - x)(y''' - y)\cos(xy)$$
$$+ 2(x''' - x)(z''' - z)\cos(xz) + 2(y''' - y)(z''' - z)\cos(yz) = a^2,$$

oder, wenn die Cosinus der Coordinatenwinkel xy, xz, yz mit γ, β, α bezeichnet und die in Nr. 9) verzeichneten Werthe substituirt werden,

$$(1 + M^2 + N^2 + 2M\gamma + 2N\beta + 2MN\alpha)x^2 = a^2;$$

auf analoge Weise gelangt man zu den Relationen

$$(1 + M^2 + N^2 + 2M\gamma + 2N\beta + 2MN\alpha)\frac{y^2}{M^2} = b^2,$$

$$(1 + M^2 + N^2 + 2M\gamma + 2N\beta + 2MN\alpha)\frac{z^2}{N^2} = c^2.$$

Aus diesen Gleichungen zieht man durch Division

$$\frac{x^2M^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}, \qquad \frac{x^2N^2}{z^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

oder

$$M = \frac{ay}{bx}, \qquad N = \frac{az}{cx},$$

und wenn man diese Werthe in die für a^2 geltende Gleichung substituirt, so erhält man nach Division mit a^2,

10) $$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \\ + 2\frac{\gamma}{ab}xy + 2\frac{\beta}{ac}xz + 2\frac{\alpha}{bc}yz = 1 \end{cases}$$

als Gleichung des gesuchten Ortes. Letzterer ist ein dreiachsiges Ellipsoid.

Wenn die gegebenen Ebenen senkrecht auf einander stehen, wird $\alpha = \beta = \gamma = 0$, und a, b, c sind dann die Halbachsen der Fläche.

4. Zwei nicht in einer Ebene liegende Gerade sind gegeben; um jede derselben dreht sich eine Ebene und zwar so, dass beide Ebenen immer senkrecht auf einander bleiben. Welche Fläche beschreibt ihre Durchschnittslinie?

Unter Benutzung desselben rechtwinkligen Coordinatensystemes, wie bei der zweiten Aufgabe, sind die Gleichungen der beiden festen Geraden

$$y = Bx, \quad z = c; \qquad y = -Bx, \quad z = -c.$$

Ist nun

$$L_1 x + M_1 y + N_1 z = 1$$

die Gleichung der einen beweglichen Ebene, so gelten, weil sie die erste Gerade in sich enthalten soll, die Bedingungen

$$L_1 + M_1 B = 0, \qquad N_1 c = 1,$$

und man kann daher die Gleichung jener Ebene in der Form

$$11) \qquad -M_1 Bx + M_1 y + \frac{1}{c} z = 1$$

darstellen. Auf analoge Weise findet sich als Gleichung einer zweiten Ebene, welche die zweite Gerade enthält,

$$12) \qquad +M_2 Bx + M_2 y - \frac{1}{c} z = 1,$$

endlich liefert die vorausgesetzte senkrechte Lage der Ebenen 11) und 12) die Bedingung

$$-M_1 M_2 B^2 + M_1 M_2 - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Durch Elimination von M_1 und M_2 aus den drei letzten Gleichungen erhält man

$$-B^2 x^2 + y^2 + (1 - B^2) z^2 = (1 - B^2) c^2$$

oder für $B = tan\ \alpha$ und durch Multiplication mit $cos^2 \alpha$

$$13) \quad -sin^2 \alpha \,.\, x^2 + cos^2 \alpha \,.\, y^2 + cos\, 2\alpha \,.\, z^2 = cos\, 2\alpha \,.\, c^2$$

als Gleichung der Fläche. Letztere ist für $c \gtrless 0$ ein einfaches Hyperboloid; für $c = 0$, d. h. bei zwei sich schneidenden Geraden, wird sie zu einem elliptischen Kegel. Eine nähere Untersuchung über die Lage der Fläche hat die Fälle zu unterscheiden, ob $cos\, 2\alpha$ positiv oder negativ, d. h. ob $\alpha < 45^0$ oder $> 45^0$ ist; wir überlassen dies dem Leser.

5. Von einem Punkte sind Senkrechte auf die sechs Seitenebenen eines gegebenen Parallelopipedes herabgelassen; welche Fläche beschreibt jener Punkt, wenn er sich so bewegt, dass das Product aus den Perpendikeln auf drei in einer bestimmten Ecke zusammentreffende Seitenflächen gleich dem Producte aus den drei übrigen Perpendikeln bleiben soll?

Die drei Kanten des Parallelopipedes mögen $2a$, $2b$, $2c$ heissen; durch den Mittelpunkt desselben legen wir parallel zu den Seitenflächen drei Ebenen und nehmen diese zu Coordinatenebenen. Drei in einer Ecke zusammenstossende Seitenflächen sind jetzt durch die Gleichungen

$$x = +a, \quad y = +b, \quad z = +c,$$

und die gegenüberliegenden durch

$$x = -a, \quad y = -b, \quad z = -c$$

bestimmt. Die von dem beweglichen Punkte xyz auf die Seitenflächen herabgelassenen Senkrechten ergeben sich aus Formel 19) in §. 19 (S. 70) wenn man die Cosinus der Coordinatenwinkel xy, xz, yz wieder mit γ, β, α und den Ausdruck

$$1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

mit δ^2 bezeichnet; jene sechs Entfernungen sind nämlich

$$\frac{+a-x}{\sqrt{1-\alpha^2}}\delta, \quad \frac{+b-y}{\sqrt{1-\beta^2}}\delta, \quad \frac{+c-z}{\sqrt{1-\gamma^2}}\delta,$$

$$\frac{-a-x}{\sqrt{1-\alpha^2}}\delta, \quad \frac{-b-y}{\sqrt{1-\beta^2}}\delta, \quad \frac{-c-z}{\sqrt{1-\gamma^2}}\delta.$$

Der Aufgabe zufolge muss nun die Gleichung

14) $(x+a)(y+b)(z+c) = (x-a)(y-b)(z-c)$

gelten und aus dieser wird nach gehöriger Hebung:

$$cxy + bxz + ayz + abc = 0$$

oder

15) $$\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} + 1 = 0.$$

Der gesuchte Ort ist demnach ein einfaches Hyperboloid, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des Parallelopipedes zusammenfällt.

Bezeichnen wir diejenigen Eckpunkte des Parallelopipedes, deren Coordinaten sind

$-a, +b, +c$, mit A,
$+a, -b, +c$, „ B,
$+a, +b, -c$, „ C,
$+a, +b, +c$, „ D,

und die gegenüberliegenden Punkte

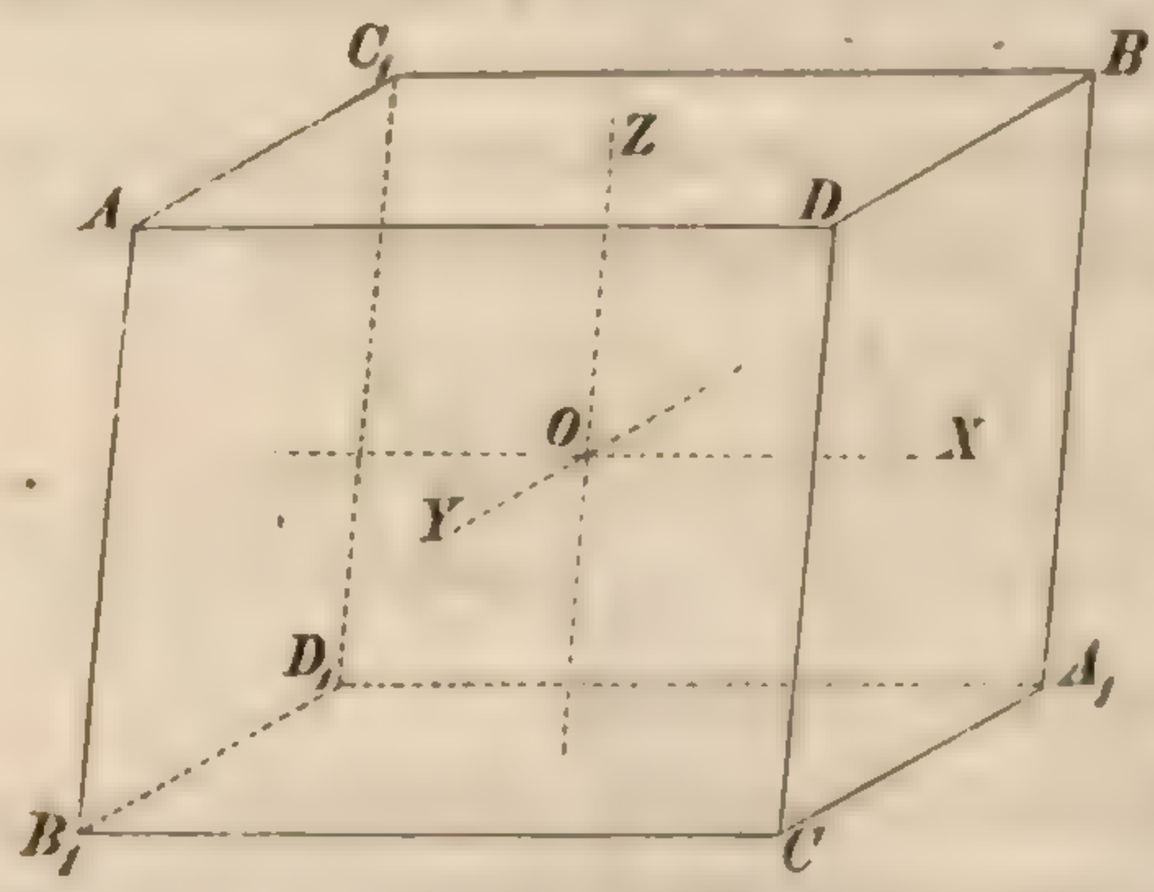
$+a, -b, -c$, mit A_1,
$-a, +b, -c$, „ B_1,
$-a, -b, +c$, „ C_1,
$-a, -b, -c$, „ D_1,

so gelten folgende Gleichungen von geraden Linien:

für die Kante AB_1: $x = -a, y = +b$,
„ „ „ A_1B: $x = +a, y = -b$;
„ „ „ AC_1: $x = -a, z = +c$,
„ „ „ A_1C: $x = +a, z = -c$;
„ „ „ BC_1: $y = -b, z = +c$,
„ „ „ B_1C: $y = +b, z = -c$;

jedes dieser sechs Gleichungssysteme erfüllt die Gleichung 14) mithin auch die Gleichung 15) d. h. die sechs entsprechenden Kanten liegen auf der Fläche und bilden dort das schiefe Sechseck $AB_1CA_1BC_1A$; die übrigen sechs Kanten AD, BD, CD, A_1D_1, B_1D_1, C_1D_1 liegen nicht auf der Fläche.

Fig. 43.



6. Welche Fläche beschreibt eine gerade Linie, wenn sie an drei festen Geraden hingleitet, von denen kein Paar in einer Ebene liegt?

Durch jede der drei gegebenen Geraden legen wir zwei Ebenen parallel zu den zwei übrigen Geraden, nehmen den Mittelpunkt des von den entstandenen sechs Ebenen begrenzten Parallelopipedes zum Coordinatenanfang und ziehen durch ihn die Coordinatenachsen parallel zu den gegebenen Geraden. Letztere können bei diesem Coordinatensysteme durch die Gleichungen

16) $$\begin{cases} y = +b, & z = -c, \\ x = -a, & z = +c, \\ x = +a, & y = -b, \end{cases}$$

dargestellt werden und sind der Reihe nach identisch mit den in der vorigen Aufgabe erwähnten Kanten B_1C, C_1A, A_1B. Die bewegliche Gerade sei durch die Gleichungen

17) $$y = Px + p, \qquad z = Qx + q$$

ausgedrückt; sie schneidet die erste feste Gerade sobald die Bedingung

$$\frac{p-b}{q+c} = \frac{P}{Q}$$

erfüllt ist; soll sie die zweite Gerade schneiden, so muss ihre xz-Projection durch die gleichnamige Spur der zweiten Geraden gehen, also

$$c = -Qa + q$$

sein; endlich ist auf ähnliche Weise die Bedingung für ihren Durchschnitt mit der dritten Geraden:

$$-b = Pa + p.$$

Durch Substitution der aus den beiden letzten Gleichungen folgenden Werthe

$$p = -Pa - b, \qquad q = Qa + c$$

verwandeln sich die vorigen drei Gleichungen in

$$y = (x-a)P - b, \qquad z = (x+a)Q + c,$$
$$aPQ + bQ + cP = 0,$$

und wenn man die Werthe von P und Q aus den zwei ersten dieser Gleichungen in die letzte einsetzt, so bleibt nach Division mit abc

$$\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} + 1 = 0.$$

Hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dass eine an drei festen Geraden gleitende Gerade ein einfaches Hyperboloid beschreibt; dabei gehören die gegebenen Geraden zu dem einen Systeme von geraden Linien, welche sich auf der Fläche ziehen lassen, und die bewegliche Gerade wird der Reihe nach mit allen Geraden des zweiten Systemes identisch. *)

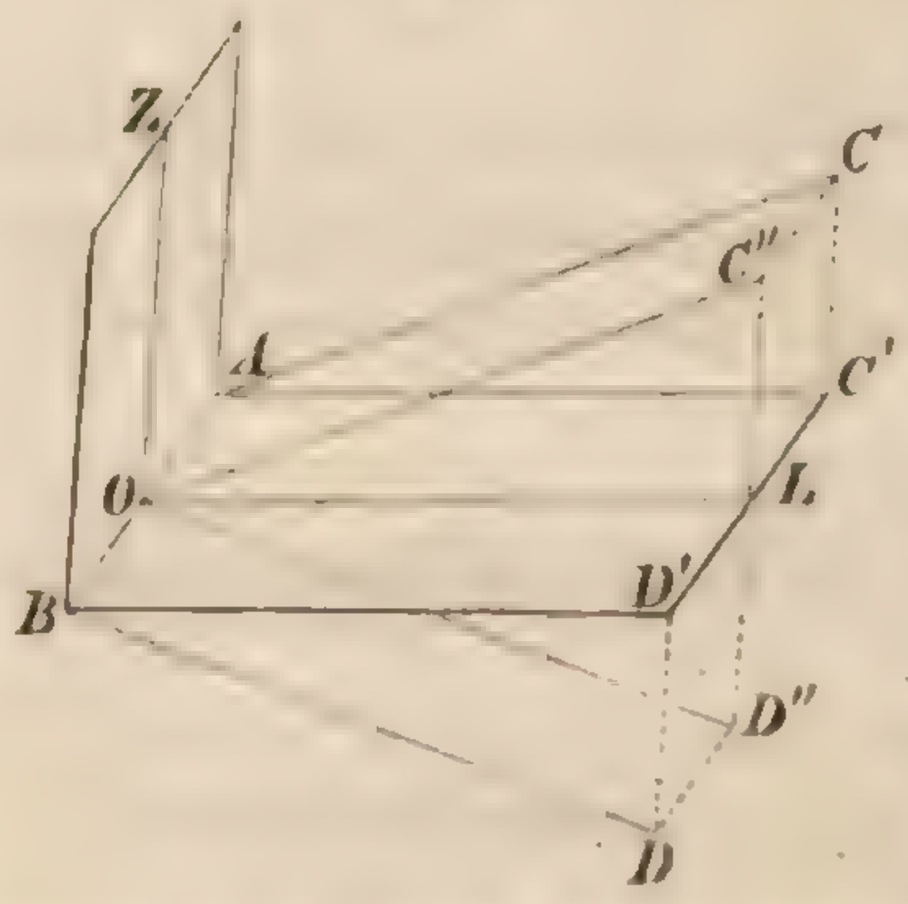
---

*) Aus dem Obigen folgt noch eine elegante Construction der Transversale zu vier gegebenen Geraden a, b, c, d. Die drei ersten derselben bestimmen nämlich, wenn man eine bewegliche Gerade daran hingleiten

7. Welche Fläche beschreibt eine gerade Linie, wenn dieselbe an zwei festen nicht in einer Ebene liegenden Geraden hingleitet und zugleich einer gegebenen Ebene parallel bleibt?

Wenn die Ebene den beiden Geraden nicht parallel ist, was wir deswegen voraussetzen müssen, weil sonst die geforderte Bewegung unmöglich sein würde, so schneiden die Geraden die Ebene in zwei Punkten A und B; wir verbinden diese durch eine Gerade, nehmen ihren Mittelpunkt O zum Coordinatenanfang, OA zur Achse der positiven y und die gegebene Ebene zur yz-Ebene. Durch O legen wir ferner zwei Parallelen zu den festen Geraden nämlich $OC'' \parallel AC$, $OD'' \parallel BD$ und erhalten hierdurch eine jenen Geraden parallele (in der Figur verticale) Ebene $C''OD''$; diese wählen wir zur Ebene xz. Sie schneidet die feste Ebene in einer Geraden nämlich der z-Achse. In der Ebene xz ziehen wir endlich irgend eine zur z-Achse parallele Gerade, welche die Hilfslinien OC'' und OD'' in zwei Punkten C''', D''' trifft, verbinden den Mittelpunkt L der Transversale $C'''D'''$ mit O durch eine Gerade und nehmen OL zur Achse der positiven x. Das Coordinatensystem hat jetzt gegen die Geraden AC und BD eine insofern symmetrische Lage, als jedem $x = OL$ zwei gleiche und entgegengesetzte y ($LC' = +y$, $LD' = -y$) sowie zwei gleiche und entgegengesetzte z ($LC'' = C'C = +z$, $LD'' = D'D = -z$) entsprechen. Für $OA = b$,

Fig. 44.



---

lässt, ein einfaches Hyperboloid, auf welchem a, b, c zu dem einen System von Geraden gehören; die vierte Gerade d schneidet die entstandene Fläche im Allgemeinen zweimal in gewissen Punkten D_1 und D_2; legt man durch jeden derselben die zum anderen Systeme gehörende Gerade g_1 resp. g_2, so schneidet sowohl g_1 als g_2 alle Geraden des ersten Systemes, mithin auch a, b, c und zugleich d, es sind daher g_1 und g_2 die beiden gesuchten Transversalen. Die zweite Hälfte der Construction lässt sich insofern abkürzen, als man durch D_1 und D_2 nur diejenigen Geraden zu ziehen braucht, welche **irgend zwei der Geraden a, b, c schneiden.**

$tan\, CAC' = tan\, \alpha = C$ sind die Gleichungen der gegebenen Geraden

$$y = b,\ z = Cx; \qquad y = -b,\ z = -Cx;$$

irgend eine der festen Ebene (yz) parallele Gerade wird durch die Gleichungen

19) $$x = m, \qquad y = Nz + p$$

ausgedrückt und schneidet jene Geraden wenn die Bedingungen

$$b = NCm + p, \qquad -b = -NCm + p$$

erfüllt sind. Hieraus ergeben sich die Werthe

$$p = 0, \qquad N = \frac{b}{Cm} = \frac{b}{Cx}$$

und durch Substitution in die zweite Gleichung unter Nr. 19)

20) $$xy = \frac{b}{C} z = b\, cot\, \alpha\, .\, z.$$

Hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dass eine Gerade, welche parallel einer unveränderlichen Ebene an zwei festen Geraden hingleitet, ein hyperbolisches Paraboloid beschreibt.

§. 44.

Tangenten, Berührungsebenen und Normalen.

Wir betrachten noch einmal die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades

1) $$\left\{\begin{array}{r} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ +2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0 \end{array}\right.$$

um die Bedingungen zu erörtern, unter welchen eine Gerade oder eine Ebene die durch vorstehende Gleichung charakterisirte Fläche berührt. Zu diesem Zwecke transformiren wir die Gleichung in- wir einen bestimmten Punkt $x_0 y_0 z_0$ der Fläche (den künftigen Berührungspunkt) zum Anfange eines neuen Coordinatensystemes wählen, welches dem ursprünglichen Systeme parallel liegt. Mit Hilfe der Substitutionen

$$x = \xi + x_0, \qquad y = \eta + y_0, \qquad z = \zeta + z_0$$

erhalten wir

$$\left.\begin{array}{r} A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\xi\eta + 2E\xi\zeta + 2F\eta\zeta \\ +2(Ax_0 + Dy_0 + Ez_0 + G)\xi \\ +2(Dx_0 + By_0 + Fz_0 + H)\eta \\ +2(Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + I)\zeta \\ +Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + 2Dx_0y_0 + 2Ex_0z_0 + 2Fy_0z_0 \\ +2Gx_0 + 2Hy_0 + 2Iz_0 + K \end{array}\right\} = 0;$$

weil aber der Punkt $x_0 y_0 z_0$ der Fläche angehört, so ist für ihn

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + 2Dx_0y_0 + 2Ex_0z_0 + 2Fy_0z_0 + 2Gx_0 + 2Hy_0 + 2Iz_0 + K = 0,$$

mithin verschwindet aus der vorigen Gleichung der von ξ, η, ζ freie Theil und es bleibt als Gleichung der Fläche:

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\xi\eta + 2E\xi\zeta + 2F\eta\zeta \\ \quad + 2(Ax_0 + Dy_0 + Ez_0 + G)\xi \\ \quad + 2(Dx_0 + By_0 + Fz_0 + H)\eta \\ \quad + 2(Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + I)\zeta \end{array} \right\} = 0.$$

Durch den neuen Anfangspunkspunkt der Coordinaten legen wir die Gerade

$$3) \qquad \eta = P\xi, \qquad \zeta = Q\xi$$

und suchen ihre Durchschnitte mit der Fläche; die Elimination von η und ζ giebt für die Coordinate ξ eine Gleichung von der Form

$$4) \qquad \xi^2 (S\xi + 2T) = 0$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$S = A + BP^2 + CQ^2 + 2DP + 2EQ + 2FPQ,$$

$$T = Ax_0 + Dy_0 + Ez_0 + G + (Dx_0 + By_0 + Fz_0 + H)P + (Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + I)Q;$$

aus den Gleichungen 4) und 3) folgen die Coordinaten der beiden vorhandenen Durchschnitte nämlich:

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0;$$

$$\xi = -\frac{2T}{S}, \qquad \eta = -\frac{2PT}{S}, \qquad \zeta = -\frac{2QT}{S}.$$

Wenn aber die Gerade 3) die Fläche 2) berühren soll, so müssen die beiden Durchschnitte zu einem einzigen Punkte zusammenfallen, und hierzu ist die Bedingung $T = 0$ erforderlich und ausreichend. Indem wir nun zu dem ursprünglicheu Coordinatensysteme zurückkehren, also in Nr. 3) $\xi - x_0$, $\eta - y_0$, $\zeta - z_0$ für ξ, η, ζ schreiben, erhalten wir den Satz: Bezeichnet $x_0 y_0 z_0$ einen bestimmten Punkt der Fläche 1) und

$$5) \qquad \eta - y_0 = P(\xi - x_0), \qquad \zeta - z_0 = (\xi - x_0)$$

eine durch denselben gelegte Gerade, so berührt letztere die Fläche im Punkte $x_0 y_0 z_0$, sobald die Coefficienten P und Q der Bedingung

$$6)\qquad \left\{\begin{array}{c} Ax_0+Dy_0+Ez_0+G \\ +(Dx_0+By_0+Fz_0+H)P \\ +(Ex_0+Fy_0+Cz_0+I)Q \end{array}\right\}=0.$$

Genüge leisten. — Von den Grössen P und Q bleibt hier eine vollkommen beliebig, es sind daher durch einen Punkt der Fläche unendlich viel Tangenten möglich.

Diese Bemerkung führt weiter auf die Frage nach dem geometrischen Orte der Tangenten d. h. nach der Fläche, welche die durch den Punkt $x_0y_0z_0$ gehenden Tangenten in ihrer stetigen Aufeinanderfolge bilden. Man gelangt hierzu indem man beachtet, dass ξ, η, ζ in Nr. 5) die Coordinaten irgend eines Punktes irgend einer solchen Tangente bedeuten, dass es folglich nur darauf ankommt P und Q aus den Gleichungen 5) und 6) auszuscheiden; durch Substitution der aus Nr. 5) folgenden Werthe

$$P=\frac{\eta-y_0}{\xi-x_0},\qquad Q=\frac{\zeta-z_0}{\xi-x_0}$$

geht nun die Gleichung in die nachstehende über:

$$7)\qquad \left\{\begin{array}{c} (Ax_0+Dy_0+Ez_0+G)(\xi-x_0) \\ +(Dx_0+By_0+Fz_0+H)(\eta-y_0) \\ +(Ex_0+Fy_0+Cz_0+I)(\zeta-z_0) \end{array}\right\}=0$$

und diese ist die Gleichung des gesuchten Ortes. Man erkennt hieraus, dass alle durch einen und denselben Punkt $x_0y_0z_0$ gehenden Tangenten in einer Ebene liegen, welche man eben desswegen die Tangentialebene am Punkte $x_0y_0z_0$ genannt hat.

Die Gleichung der Berührungsebene wird etwas einfacher, wenn man ihr zunächst die Form

$$\begin{gathered}(Ax_0+Dy_0+Ez_0+G)\,\xi \\ +(Dx_0+By_0+Fz_0+H)\,\eta \\ +(Ex_0+Fy_0+Cz_0+I)\,\zeta \\ -(Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2+2Dx_0y_0+2Ex_0z_0+2Fy_0z_0) \\ -(Gx_0+Hy_0+Iz_0)=0\end{gathered}$$

ertheilt und hierzu die Gleichung

$$\begin{gathered}Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2+2Dx_0y_0+2Ex_0z_0+2Fy_0z_0 \\ +2Gx_0+2Hy_0+2Iz_0+K=0\end{gathered}$$

addirt, welche die Voraussetzung ausdrückt, dass der Punkt $x_0y_0z_0$ auf der Fläche liegt; man erhält:

$$8)\qquad \left\{\begin{array}{l}(Ax_0+Dy_0+Ez_0+G)\,\xi\\ +(Dx_0+By_0+Fz_0+H)\,\eta\\ +(Ex_0+Fy_0+Cz_0+I)\,\zeta\\ +Gx_0+Hy_0+Iz_0+K\end{array}\right\}=0,$$

und kann hieraus leicht die früheren Gleichungen ableiten, welche in den §§. 37 . . . 41 für die Berührungsebenen entwickelt wurden.

Das im Punkte $x_0y_0z_0$ auf der Tangentialebene errichtete Perpendikel pflegt man die Normale durch diesen Punkt zu nennen; ihre Gleichungen finden sich auf die in §. 19, β angegebene Weise. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$A_0=Ax_0+Dy_0+Ez_0+G,$$
$$B_0=Dx_0+By_0+Fz_0+H,$$
$$C_0=Ex_0+Fy_0+Cz_0+I,$$
$$\mathfrak{A}=(1-\alpha^2)A_0-(\gamma-\alpha\beta)B_0-(\beta-\alpha\gamma)C_0,$$
$$\mathfrak{B}=(1-\beta^2)B_0-(\alpha-\beta\gamma)C_0-(\gamma-\alpha\beta)A_0,$$
$$\mathfrak{C}=(1-\gamma^2)C_0-(\beta-\alpha\gamma)A_0-(\alpha-\beta\gamma)B_0,$$

wo α, β, γ die Cosinus der Coordinatenwinkel yz, xz, xy bezeichnen, so sind die Gleichungen der Normale

$$\eta-y_0=\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}(\xi-x_0),\qquad \zeta-z_0=\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}(\xi-x_0)$$

oder

$$9)\qquad \frac{\xi-x_0}{\mathfrak{A}}=\frac{\eta-y_0}{\mathfrak{B}}=\frac{\zeta-z_0}{\mathfrak{C}}.$$

Bei rechtwinkligen Coordinaten hat man einfacher

$$10)\qquad \frac{\xi-x_0}{A_0}=\frac{\eta-y_0}{B_0}=\frac{\zeta-z_0}{C_0},$$

woraus man leicht die in den §§. 37 . . , 41 vorkommenden Normalengleichungen ableiten kann.

Wir knüpfen hieran einige allgemeine Erörterungen über die Bestimmung der Tangenten, Berührungsebenen und Normalen an beliebigen Flächen.

α. Tangenten. Bezeichnen wir einen auf irgend welche Weise aus x, y, z und constanten Grössen zusammengesetzten Ausdruck durch $\varphi(x, y, z)$, so charakterisirt die Gleichung

$$11)\qquad \varphi(x, y, z)=0$$

irgend eine Fläche; ein beliebiger Punkt derselben sei $x_0y_0z_0$ und durch diesen soll eine Tangente an die Fläche gelegt werden. Zu diesem Zwecke verbinden wir den Punkt $x_0y_0z_0$ mit einem zweiten

Punkte $x_1 y_1 z_1$ der nämlichen Fläche und suchen zunächst die Gleichungen der so construirten Secante; wir erhalten

12) $\eta - y = M(\xi - x), \qquad \zeta - z = N(\xi - x),$

worin

13) $$M = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad N = \frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0}.$$

Da beide Punkte $x_0 y_0 z_0$ und $x_1 y_1 z_1$ auf der Fläche 11) liegen, so gelten die Gleichungen

14) $\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad \varphi(x_1, y_1, z_1) = 0;$

diese können wir so miteinander combiniren, dass eine neue Gleichung entsteht, worin M und N vorkommen und letztere Gleichung enthält dann die Bedingung, unter welcher die Gerade 12) die Fläche in den Punkten $x_0 y_0 z_0$ und $x_1 y_1 z_1$ schneidet. Lassen wir nun den Punkt $x_1 y_1 z_1$ dem Punkte $x_0 y_0 z_0$ näher rücken, so dreht sich die Secante um den Punkt $x_0 y_0 z_0$ und geht für $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$ in die Tangente über. Dieser Grenzlage der Secante entsprechen gewisse Grenzwerthe von M und N, welche sich zwar in Nr. 14) unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ darstellen, jedenfalls aber irgend welche endliche Grössen sind, die wir durch P und Q bezeichnen wollen. Nehmen wir auch in der vorhin erwähnten aus Nr. 15) abgeleiteten Bedingungsgleichung $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$ und $z_1 = z_0$ indem wir zugleich P für M und Q für N setzen, so erhalten wir diejenige neue Bedingungsgleichung, welche für den Fall gilt, wo die Gerade

15) $\eta - y_0 = P(\xi - x_0), \qquad \zeta - z_0 = Q(\xi - x_0)$

die gegebene Fläche im Punkte $x_0 y_0 z_0$ berührt.

Bei der Anwendung auf die Flächen zweiten Grades haben wir für $x_0 y_0 z_0$ und $x_1 y_1 z_1$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} &A x_0^2 + B y_0^2 + C z_0^2 + 2D x_0 y_0 + 2E x_0 z_0 + F y_0 z_0 \\ &\quad + 2G x_0 + 2H y_0 + 2I z_0 + K = 0, \\ &A x_1^2 + B y_1^2 + C z_1^2 + 2D x_1 y_1 + 2E x_1 z_1 + 2F y_1 z_1 \\ &\quad + 2G x_1 + 2H y_1 + 2I z_1 + K = 0; \end{aligned}$$

um hieraus eine Combination zu bilden, welche die Einführung von M und N gestattet, ziehen wir die erste Gleichung von der zweiten ab und benutzen in den ersten drei Gliedern die identische Gleichung

$$t_1^2 - t_0^2 = (t_1 + t_0)(t_1 - t_0)$$

und in den drei folgenden die gleichfalls identische Formel

$$u_1 v_1 - u_0 v_0 = u_1 (v_1 - v_0) + v_0 (u_1 - u_0);$$

wir erhalten auf diesem Wege

$$\begin{aligned} &A (x_1 + x_0) (x_1 - x_0) + B (y_1 + y_0) (y_1 - y_0) + C (z_1 + z_0) (z_1 - z_0) \\ &\quad + 2D [x_1 (y_1 - y_0) + y_0 (x_1 - x_0)] \\ &\quad + 2E [x_1 (z_1 - z_0) + z_0 (x_1 - x_0)] \\ &\quad + 2F [y_1 (z_1 - z_0) + z_0 (y_1 - y_0)] \\ &\quad + 2G (x_1 - x_0) + 2H (y_1 - y_0) + 2I (z_1 - z_0) = 0. \end{aligned}$$

Die Division mit $x_1 - x_0$ bietet hier Gelegenheit zur Substitution von M und N, es wird nämlich

$$\begin{aligned} &A (x_1 + x_0) + B (y_1 + y_0) M + C (z_1 + z_0) N \\ &+ 2D [x_1 M + y_0] + 2E [x_1 N + z_0] + 2F [y_1 N + z_1 M] \\ &\quad + 2G + 2HM + 2IN = 0. \end{aligned}$$

Für $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, $M = P$, $N = Q$ verwandelt sich diese Gleichung nach Hebung mit 2 in

$$\begin{aligned} &Ax_0 + By_0 P + Cz_0 Q \\ &+ D(x_0 P + y_0) + E(x_0 Q + z_0) + F(y_0 Q + z_0 P) \\ &\quad + G + HP + IQ = 0 \end{aligned}$$

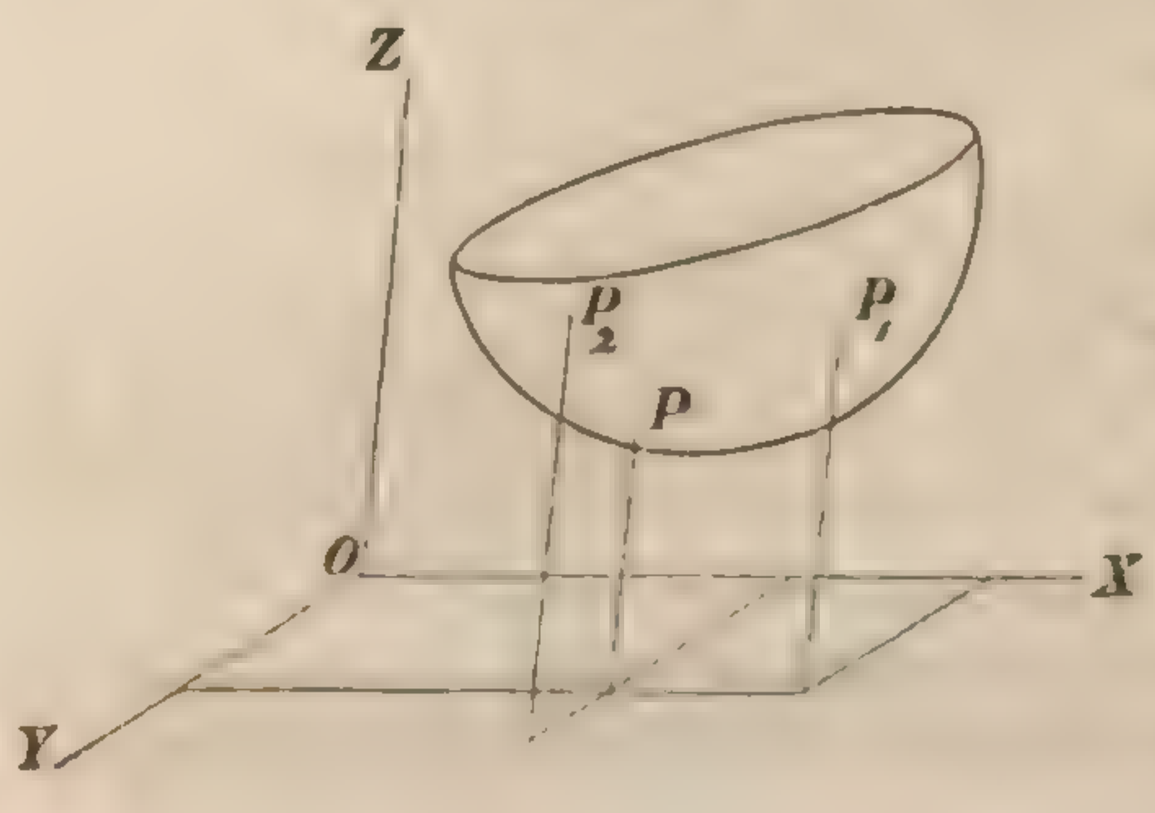
und enthält die Bedingung, unter welcher die Gerade 15) die Fläche 1) im Punkte $x_0 y_0 z_0$ berührt. Die Identität der vorigen Gleichung und der früher gefundenen Bedingung 6) ist leicht zu sehen.

β. Tangentialebenen. Sowie wir vorhin die berührende Gerade als diejenige letzte Secante betrachteten, deren Durchschnitte mit der Fläche in einem Punkte zusammengefallen sind, so können wir auch die berührende Ebene aus einer schneidenden Ebene ableiten, wenn wir die von letzterer Ebene abgeschnittene Kappe sich zu einem Punkte zusammenziehen lassen. Sei wiederum

$$\varphi (x, y, z) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Fläche und $x_0 y_0 z_0$ ein auf ihr liegender Punkt P_0, an welchen eine Tangentialebene gelegt werden soll. Ausser diesem Punkte wählen wir auf der Fläche noch zwei andere Punkte P_1 und P_2, deren erster dasselbe y und deren

Fig. 45.



zweiter dasselbe x wie P_0 besitzt, und die wir demgemäss mit $x_1 y_0 z_1$ und $x_0 y_2 z_1$ bezeichnen. Für die durch alle drei Punkte gehende Ebene finden wir ohne Mühe die Gleichung

16) $$S(\xi - x_0) + T(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0,$$

worin

17) $$S = \frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0}, \qquad T = \frac{z_2 - z_0}{y_2 - y_0}.$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass die erwähnten Punkte auf der Fläche liegen, dass also die Gleichungen

18) $$\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0, \ \varphi(x_1, y_0, z_1) = 0, \ \varphi(x_0, y_2, z_2) = 0$$

bestehen, woraus man die Werthe von S und T herleiten kann; doch ist dies nicht nothwendig, es reicht hin, die Gleichungen 19) zu zwei neuen Gleichungen so zu verbinden, dass S und T darin vorkommen. Lassen wir jetzt die Punkte P_1 und P_2 dem Punkte P_0 immer näher rücken, so dreht sich die schneidende Ebene um den Punkt P_0 und geht zuletzt für $x_1 = x_0$, $y_2 = y_0$, $z_2 = z_1 = z_0$ in die Tangentialebene über. Dieser Grenzlage der schneidenden Ebene entsprechen gewisse Grenzwerthe von S und T, welche mit U und V bezeichnet werden mögen. Schreiben wir also in Nr. 17) U und V für S und T und setzen in den aus Nr. 19) abgeleiteten Bedingungsgleichungen $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_2 = z_1 = z_0$, $S = U$, $T = V$, so erhalten wir die beiden neuen Bedingungen, unter welchen die Ebene

19) $$U(\xi - x_0) + V(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0$$

die gegebene Fläche berührt.

Bei der Anwendung auf die Flächen zweiten Grades gelten für $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_0 z_1$, $x_0 y_2 z_2$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} &A x_0^2 + B y_0^2 + C z_0^2 + 2D x_0 y_0 + 2E x_0 z_0 + 2F y_0 z_0 \\ &\quad + 2G x_0 + 2H y_0 + 2I z_0 + K = 0, \\ &A x_1^2 + B y_0^2 + C z_1^2 + 2D x_1 y_0 + 2E x_1 z_1 + 2F y_0 z_1 \\ &\quad + 2G x_1 + 2H y_0 + 2I z_1 + K = 0, \\ &A x_0^2 + B y_2^2 + C z_2^2 + 2D x_0 y_2 + 2E x_0 z_2 + 2F y_2 z_2 \\ &\quad + 2G x_0 + 2H y_2 + 2I z_2 + K = 0; \end{aligned}$$

wir subtrahiren die erste von der zweiten, zerlegen wie vorhin, dividiren mit $x_1 - x_0$ und substituiren S; dies giebt

$$\begin{aligned} &A(x_1 + x_0) + C(z_1 + z_0) S + 2D y_0 \\ &+ 2E(x_1 S + z_0) + 2F y_0 S + 2G + 2IS = 0. \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise verbinden wir die erste der obigen Gleichun-

gen mit der dritten, dividiren den Unterschied durch $y_2 - y_0$ und substituiren T; wir erhalten:

$$B(y_2 + y_0) + C(z_2 + z_0)T + 2Dx_0 + 2Ex_0T + 2F(y_2T + z_0) + 2H + 2IT = 0.$$

Für $x_1 = x_0$, $y_2 = y_0$, $z_2 = z_1 = z_0$, $S = U$, $T = V$ verwandeln sich diese Gleichungen nach Hebung mit 2 in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} &Ax_0 + Cz_0U + Dy_0 \\ &+ E(x_0U + z_0) + Fy_0U + G + IU \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &By_0 + Cz_0V + Dx_0 \\ &+ Ex_0V + F(y_0V + z_0) + H + IV \end{aligned}\right\} = 0,$$

aus denen man für die Unbekannten U und V findet:

$$U = -\frac{Ax_0 + Dy_0 + Ez_0 + G}{Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + I},$$

$$V = -\frac{Dx_0 + By_0 + Fz_0 + H}{Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + I}.$$

Nach Substitution dieser Werthe bringt man die Gleichung 19) leicht auf dieselbe Form, unter welcher die Gleichung der Tangentialebene in Nr. 7) dargestellt wurde.

7. Normalen. Nachdem die Gleichung der Berührungsebene auf dem soeben angedeuteten Wege entwickelt worden ist, ergeben sich die Gleichungen der im Punkte $x_0y_0z_0$ auf der Tangentialebene errichteten Senkrechten (der Normale) mittelst der Formeln des §. 19, β, wie dies schon vorhin bei den Flächen zweiten Grades gezeigt wurde.

§. 45.

Cubatur der Flächen zweiten Grades.

Wenn es darauf ankommt, das Volumen eines ganz oder theilweis von krummen Flächen begrenzten Körpers zu ermitteln, so kann man ein ähnliches Verfahren in Anwendung bringen wie die analytische Geometrie der Ebene bei der Quadratur krummlinig begrenzter Ebenen. Durch eine Reihe paralleler Schnitte zerlegt man vorerst das Volumen in eine Reihe von Schichten und bestimmt die Flächen der entstandenen Querschnitte; jede solche Schicht wird von zwei Querschnitten, etwa Q' und Q'', begrenzt, deren Entfernung ε heissen möge. Construirt man zwei Cylinder,

von denen einer Q', der andere Q'' zur Basis hat, und deren gemeinschaftliche Höhe (oder Dicke) ε ist, so wird in den meisten Fällen der eine Cylinder die Schicht umschliessen, der andere dagegen von der Schicht umschlossen werden, so dass das Volumen der Schicht zwischen den Cylinderinhalten $Q'\varepsilon$ und $Q''\varepsilon$ liegt. Durch Addition der Volumina aller umschriebenen und aller eingeschriebenen Cylinder erhält man zwei Volumina Σ' und Σ'', zwischen denen das gesuchte Volumen enthalten ist, und es kommt jetzt darauf an, die Grössen Σ' und Σ'' einander immer näher zu bringen. Bezeichnet n die Anzahl der Schichten, in welche das Volumen zerlegt wurde, so besteht jede der Summen Σ' und Σ'' aus n-Gliedern, daraus lässt sich leicht der Betrag von $\Sigma' - \Sigma''$ herleiten und zwar ist derselbe einerlei mit der Differenz zwischen dem ersten eingeschriebenen und letzten umschriebenen oder zwischen dem ersten umschriebenen und dem letzten eingeschriebenen Cylinder. Nähert sich nun bei unendlich wachsenden n, d. h. wenn die Anzahl der Schichten unausgesetzt zunimmt und folglich die Dicke jeder einzelnen Schicht immer geringer wird, die Differenz $\Sigma' - \Sigma''$ der Grenze Null, so ist dies ein Zeichen, dass die Summen Σ' und Σ'' nach einer und derselben Grenze streben; diese gemeinschaftliche Grenze kann aber keine andere als das gesuchte Volumen sein, weil letzteres immer zwischen Σ' und Σ'' enthalten bleibt. — Dieses Princip wollen wir zur Cubatur der Zonen und Kappen von Flächen zweiten Grades anwenden.

Das Ellipsoid. Beziehen wir die Fläche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Achsen mit den Achsen des Ellipsoides zusammenfallen, so ist wie in §. 37 der in der Höhe h parallel zur xy-Ebene gelegte Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 - h^2}, \qquad \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - h^2},$$

mithin ihre Fläche

$$= \pi \frac{ab}{c^2}(c^2 - h^2).$$

Um den cubischen Inhalt V einer Zone zu finden, welche von der Ebene xy, einer in der Höhe z dazu parallel gelegten Ebene und im Uebrigen von der Fläche begrenzt wird, theilen wir die Höhe z der Zone in n gleiche Strecken, legen durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel xy und erhalten auf diese Weise n-Schichten, de-

ren jede in horizontaler Richtung von zwei Ellipsenflächen begrenzt wird und die Höhe $\frac{z}{n}$ besitzt. Die untere Begrezungsecne ist jedesmal die grössere und da die Fläche sich um so mehr von allen Seiten her zusammenzieht je höher die Querschnitte hinaufrücken, so beträgt das Volumen irgend einer Schicht weniger als das Volumen des umschriebenen elliptischen Cylinders, dessen Basis die Basis der Schicht ist, und mehr als das Volumen des eingeschriebenen Cylinders, dessen Querschnitt die obere Begrenzungsfläche der Schicht ist. Demgemäss gelten folgende Beziehungen:

$$V < \pi \frac{ab}{c^2}[c^2]\frac{z}{n} + \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{2z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \ldots$$
$$\ldots + \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{(n-1)z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n},$$

$$V > \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{2z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \ldots$$
$$\ldots + \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{nz}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n};$$

die Differenz beider Cylindersummen ist

$$\pi \frac{ab}{c^2}[c^2]\frac{z}{n} - \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{nz}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} = \pi \frac{ab}{c^2}\frac{z^3}{n},$$

und da sich dieser Ausdruck für unendlich wachsende n der Grenze Null nähert, so haben die beiden Cylindersummen einen und denselben Grenzwerth, welcher den Betrag von V darstellt. Zufolge dieser Bemerkung brauchen wir nur den Grenzwerth der einen Cylindersumme zu bestimmen und wenn wir dazu die erste wählen, so ist bei gehöriger Zusammenziehung

$V =$ dem Grenzwerthe von:

$$\pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}\right]z$$

und nach einem bekannten arithmetischen Satze,

$$1) \qquad V = \pi \frac{ab}{c^2}(c^2 z - z^3).$$

Für $z = h$ ergiebt sich hieraus $\frac{2}{3}\pi abc$ als Volumen des halben mithin

$$2) \qquad E = \frac{4}{3}\pi abc$$

als Volumen des ganzen Ellipsoides. Die Formel für den Ku-

gelinhalt ist, wie man sieht, ein sehr specieller Fall der vorstehenden.

Ist die eine Begrenzungsebene einer Zone um z_0, die andere um z_1 von der xy-Ebene entfernt, so kann das Volumen der Zone als der Unterschied der Inhalte zweier Zonen der vorigen Art betrachtet werden; für $z_1 > z_0$ ist hiernach das gesuchte Volumen

$$3) \qquad \pi \frac{ab}{c^2} [c^2 (z_1 - z_0) - \tfrac{1}{3}(z_1^3 - z_0^3)];$$

handelt es sich um die Inhalte von Zonen, deren Begrenzungsebenen auf einer andern als der z-Achse senkrecht stehen, so bedarf es keiner neuen Rechnung, sondern nur einer Buchstabenvertauschung; für eine Zone, deren Begrenzungsebenen senkrecht auf der y-Achse in den Entfernungen y_0 und $y_1 > y_0$ vom Mittelpunkte stehen, hat man

$$4) \qquad \pi \frac{ac}{b^2} [b^2 (y_1 - y_0) - \tfrac{1}{3} (y_1^3 - y_0^3)],$$

und entsprechend für eine Zone, deren Begrenzungsebenen senkrecht auf der x-Achse in den Entfernungen x_0 und $x_1 > x_0$ vom Mittelpunkte stehen:

$$5) \qquad \pi \frac{bc}{a^2} [a^2 (x_1 - x_0) - \tfrac{1}{3} (x_1^3 - x_0^3)].$$

Durch Subtraction der Zone 1) von dem halben Ellipsoide erhält man eine Kappe von der Höhe $c - z$, die kurz z' heissen möge; das Volumen dieser Kappe ist:

$$6) \qquad \pi \frac{cb}{c^2} (cz'^2 - \tfrac{1}{3} z'^3);$$

steht die Begrenzungsebene der Kappe senkrecht auf der y-Achse in der Entfernung y' vom Scheitel, so ist der Inhalt der Kappe:

$$7) \qquad \pi \frac{ac}{b^2} (by'^2 - \tfrac{1}{3} y'^2);$$

endlich entspricht das Volumen

$$8) \qquad \pi \frac{bc}{a^2} (ax'^2 - \tfrac{1}{3} x'^3)$$

dem Falle, wo die Begrenzungsebene der Kappe senkrecht zur x-Achse und um x' vom Scheitel der Fläche entfernt ist.

Das einfache Hyperboloid. Unter Voraussetzung desselben Coordinatensystemes, wie in §. 38, ist ein in der Höhe

parallel zur xy-Ebene gelegter Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}, \qquad \frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2},$$

folglich der Flächeninhalt des Schnittes

$$= \pi \frac{ab}{c^2}(c^2+h^2).$$

Um das Volumen V einer Zone zu finden, welche von der Ebene xy, einer in der Höhe z parallel dazu gelegten Ebene und im Uebrigen von der Fläche begrenzt wird, theilen wir z in n gleiche Strecken, legen durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel xy und erhalten so n Schichten, deren jede in horizontaler Richtung von zwei Ellipsenflächen begrenzt wird. Die untere Ebene ist jedesmal die kleinere, und da die Fläche sich nach oben zu allseitig erweitert, so beträgt das Volumen einer Schicht mehr als das Volumen des eingeschriebenen elliptischen Cylinders, dessen Basis die Basis der Schicht ist, und weniger als das Volumen des umschriebenen Cylinders, welcher die obere Begrenzungsebene der Schicht zum Querschnitt hat. Demgemäss gelten die Relationen

$$V > \pi \frac{ab}{c^2}[c^2]\frac{z}{n} + \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{2z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \ldots$$
$$\ldots + \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{(n-1)z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n},$$

$$V < \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{2z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \ldots$$
$$\ldots + \pi \frac{ab}{a^2}\left[c^2+\left(\frac{nz}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n};$$

die Differenz beider Cylindersummen beträgt

$$\pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{nz}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} - \pi \frac{ab}{c^2}[c^2]\frac{z}{n} = \pi \frac{ab}{c^2}\frac{z^3}{n},$$

und da sich dieser Ausdruck für unendlich wachsende n der Grenze Null nähert, so haben beide Cylindersummen einen und denselben Grenzwerth, welcher den Betrag von V angiebt. Es ist daher, wenn wir bei der ersten Cylindersumme stehen bleiben und diese möglichst zusammenziehen

$V =$ dem Grenzwerthe von:

$$\pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2+\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}z^2\right]z$$

d. i.

9) $$V = \pi \frac{ab}{c^2} (c^2 z + \tfrac{1}{3} z^3).$$

Der Specialwerth $z = c$ giebt $V = \frac{4}{3} \pi abc$ und damit den bemerkenswerthen Satz, dass das Volumen der Zone von der Höhe c gleich dem Volumen eines aus den Halbachsen a, b, c construirten Ellipsoides ist.*)

Eine Zone, deren Begrenzungsebenen parallel xy in den Entfernungen z_0 und $z_1 > z_0$ liegen kann als Differenz zweier Zonen der vorigen Art betrachtet werden; ihr Volumen ist daher

10) $$\pi \frac{ab}{c^2} [c^2 (z_1 - z_0) + \tfrac{1}{3} (z_1^3 - z_0^3)].$$

Das getheilte Hyperboloid. Dieselben Bezeichnungen wie in §. 39 vorausgesetzt, ist ein in der Höhe $h > c$ parallel zur xy-Ebene gelegter Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{h^2 - c^2}, \qquad \frac{b}{c}\sqrt{h^2 - c^2}$$

mithin der Flächeninhalt des Schnittes

$$= \pi \frac{ab}{c^2} (h^2 - c^2).$$

Nennen wir h' den Abstand des Schnittes vom nächsten Scheitel des Hyperboloides, so ist $h = c + h'$ folglich die Querschnittsfläche

$$= \pi \frac{ab}{c^2} (2ch' + h'^2).$$

Um das Volumen V einer Kappe zu finden, welche durch eine in der Höhe $z > c$ parallel zu xy gelegte Ebene abgeschnitten wird, setzen wir die Höhe der Kappe

$$z - c = z' \text{ also } z = c + z',$$

---

*) Gelegentlich möge hier folgende Vergleichung Platz finden. Construirt man aus a, b, c ein Hyperboloid, dessen Zone von der Höhe c das Volumen H besitzt, einen Cylinder C, ein halbes Ellipsoid E und einen Kegel K (Asymptotenkegel von H), so hat man

$$K = \tfrac{1}{3} \pi abc, \quad E = \tfrac{2}{3} \pi abc, \quad C = \pi abc, \quad H = \tfrac{4}{3} \pi abc,$$

folglich

$$K : E : C : H = 1 : 2 : 3 : 4,$$

und dies ist die Erweiterung des Archimedischen Satzes von Kegel, Kugel und Cylinder.

theilen z' in n gleiche Strecken und legen durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel xy, wir erhalten auf diese Weise n Schichten, deren jede von zwei Ellipsenflächen begrenzt wird und die Höhe $\frac{z'}{n}$ besitzt. Die untere Begrenzungsebene ist jedesmal die kleinere und da das Hyperboloid sich nach oben zu allseitig erweitert, so beträgt das Volumen einer Schicht mehr als das Volumen des eingeschriebenen elliptischen Cylinders, welcher die untere Begrenzungsebene zur Basis hat, und weniger als das Volumen des umschriebenen Cylinders, dessen Querschnitt die obere Begrenzungsebene ist. Demgemäss gelten folgende Relationen

$$V > \pi\frac{ab}{c^2}[0]\frac{z'}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{z'}{n} + \left(\frac{z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{2z'}{n} + \left(\frac{2z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} + .$$

$$\ldots + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{(n-1)z'}{n} + \left(\frac{(n-1)z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n},$$

$$V < \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{z'}{n} + \left(\frac{z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{2z'}{n} + \left(\frac{2z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} + \ldots$$

$$\ldots + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{nz'}{n} + \left(\frac{nz'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n};$$

die Differenz beider Cylindersummen beträgt

$$\pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{z'}{n} + \left(\frac{nz'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} = \pi\frac{ab}{c^2}\frac{2cz' + z'^2}{n}$$

und da dieser Ausdruck bei unendlich wachsenden n der Grenze Null zueilt, so haben die beiden obigen Cylindersummen eine gemeinschaftliche Grenze $= V$. Bleiben wir bei der ersten Summe stehen, so ist

$V =$ dem Grenzwerthe von:

$$\pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{1+2+..+(n-1)}{n}z' + \frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}z'^2\right]z'$$

und zwar nach bekannten Sätzen

$$11) \qquad V = \pi\frac{ab}{c^2}\left(cz'^2 + \tfrac{1}{3}z'^3\right),$$

oder bei Restitution des Werthes von z'

$$12) \qquad V = \pi\frac{ab}{c^2}\left(\tfrac{2}{3}c^3 - c^2z + \tfrac{1}{3}z^3\right).$$

Der Specialwerth $z = 2c$ oder $z' = c$ giebt $V = \frac{4}{3}\pi abc$ und hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dass das Volumen der

Kappe von der Höhe c mit dem Volumen der Zone übereinkommt, welche in dem einfachen Hyperboloide, von der Kehlellipse ab gerechnet, die nämliche Höhe besitzt.

Eine Zone, deren Begrenzungsebenen parallel zur xy-Ebene in den Entfernungen z_0 und $z_1 > z_0 > c$ liegen, kann als Differenz zweier Kappen betrachtet werden, und hat demnach das Volumen

$$13) \qquad \pi \frac{ab}{c^2}[-c^2(z_1 - z_0) + \tfrac{1}{3}(z_1^3 - z_0^3)].$$

Aus dem Vergleiche mit der zwischen denselben Ebenen enthaltenen Zone des einfachen Hyperboloides folgt, dass die Differenz beider Zonen (ein ringförmiger Körper) einem elliptischen Cylinder gleich ist, welcher die Kehlellipse des einfachen Hyperboloides zur Basis und die doppelte Höhe der einen Zone zur Höhe hat.

Das elliptische Paraboloid. Der in der Höhe h parallel zur xy-Ebene gelegte elliptische Querschnitt besitzt nach §. 40 die Halbachsen $\sqrt{2ah}$ und $\sqrt{2bh}$ mithin den Flächeninhalt

$$2\pi\sqrt{abh};$$

handelt es sich um das Volumen V einer Kappe von der Höhe z, so theilt man z wieder in n gleiche Strecken, legt durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel xy und zerfällt somit die Kappe in n Schichten, deren jede von zwei Ellipsenflächen begrenzt wird und die Höhe $\frac{z}{n}$ besitzt. Zufolge des Umstandes, dass sich das Paraboloid nach oben zu allseitig erweitert, ist jede solche Schicht grösser als der eingeschriebene und kleiner als der umschriebene elliptische Cylinder mithin

$$V > 2\pi\sqrt{ab}\,0\frac{z}{n} + 2\pi\sqrt{ab}\frac{z}{n}\frac{z}{n} + 2\pi\sqrt{ab}\frac{2z}{n}\frac{z}{n} + \ldots$$

$$\ldots + 2\pi\sqrt{ab}\frac{(n-1)z}{n}\frac{z}{n},$$

$$V < 2\pi\sqrt{ab}\frac{z}{n}\frac{z}{n} + 2\pi\sqrt{ab}\frac{2z}{n}\frac{z}{n} + 2\pi\sqrt{ab}\frac{3z}{n}\frac{z}{n} + \ldots$$

$$\ldots + 2\pi\sqrt{ab}\frac{nz}{n}\frac{z}{n}.$$

Die Differenz beider Cylindersummen beträgt

$$2\pi\sqrt{ab}\frac{nz}{n}\frac{z}{n} = 2\pi\sqrt{ab}\frac{z^2}{n}$$

und hat für unendlich wachsende n die Null zur Grenze; beide

Cylindersummen nähern sich daher einer gemeinschaftlichen Grenze $= V$, d. h. es ist, wenn wir die erste Summe betrachten,

$V =$ dem Grenzwerthe von:

$$2\pi\sqrt{ab}\,\frac{1+2+3+\ldots\ldots+(n-1)}{n^2}z^2$$

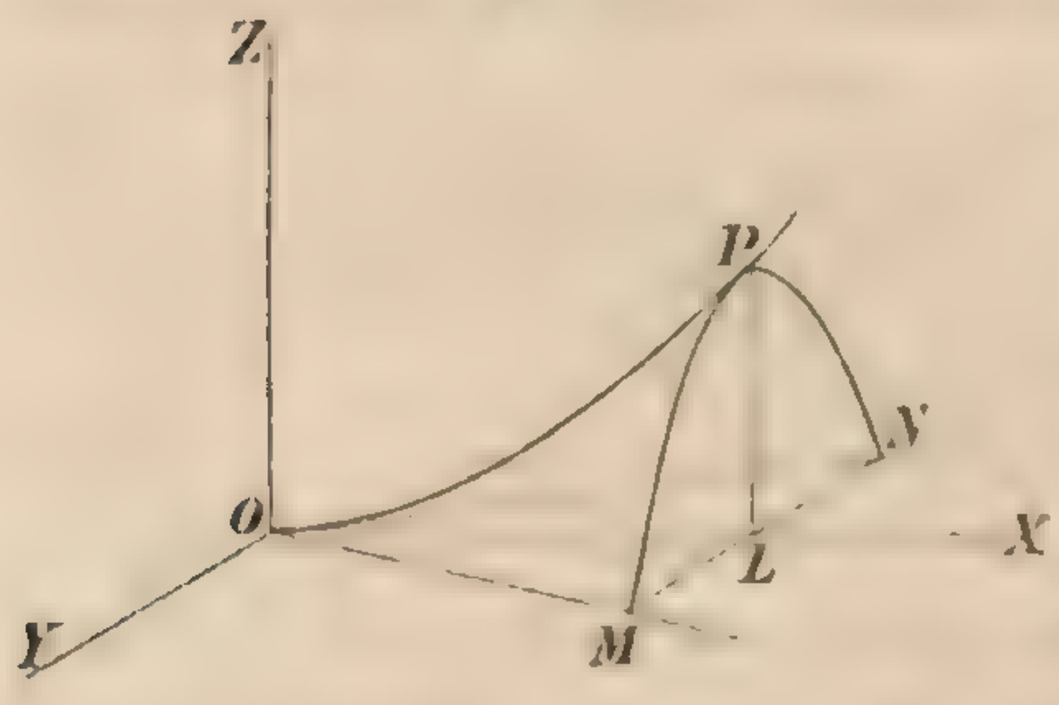
oder

14) $$V = \pi\sqrt{ab}\,z^2.$$

Der Inhalt einer Zone, deren Begrenzungsebenen parallel zur xy-Ebene in den Entfernungen z_0 und $z_1 > z_0$ liegen, ergiebt sich hieraus

15) $$= \pi\sqrt{ab}\,(z_1^2 - z_0^2).$$

Fig. 46.



Das hyperbolische Paraboloid. Um einen quadrirbaren Querschnitt der Fläche zu erhalten legen wir in der Entfernung $OL = l$ eine Ebene parallel zur yz-Ebene durch das Paraboloid; der entstehende Verticalschnitt ist eine durch die Gleichung

$$\frac{l^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

charakterisirte Parabel MPN. Sie schneidet die xy-Ebene in zwei Punkten M und N, für welche $z = 0$ und $y = LM$ oder $= LN$ ist; dies giebt

$$LM = +l\sqrt{\frac{b}{a}}, \qquad LN = -l\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Diese Parabel begegnet ferner der xz-Ebene in einem Punkte P (ihrem Scheitel), dessen $y = 0$ und dessen $z = LP$ ist, woraus folgt

$$LP = \frac{1}{2}\frac{l^2}{a}.$$

Der bekannte Satz des Archimedes lehrt nun den Flächeninhalt des Querschnittes kennen, nämlich $MPN = \frac{4}{3}\,LM \,.\, LP$, d. i. vermöge der angegebenen Werthe,

$$\frac{2}{3}\frac{l^3}{a}\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}l^3.$$

Nach dieser Vorbereitung schreiten wir zur Inhaltsbestimmung des körperlichen Raumes V, welcher von der xy-Ebene, von einem in der Entfernung x parallel zur yz-Ebene gelegten Querschnitte und im Uebrigen von dem hyperbolischen Paraboloide begrenzt wird. Zu diesem Zwecke theilen wir x in n gleiche Strecken, legen durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel yz und zerfällen somit das Volumen in n Schichten, deren jede von zwei parabolischen Querschnitten begrenzt wird und $\frac{x}{n}$ zur Dicke hat. Da sich die Fläche in der Richtung der x allseitig erweitert, so beträgt das Volumen einer solchen Schicht mehr als das Volumen des eingeschriebenen und weniger als das Volumen des umschriebenen parabolischen Cylinders; diese Bemerkung führt zu den Relationen

$$V > \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\,0\,\frac{x}{n} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{x}{n}\right)^3\frac{x}{n} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{2x}{n}\right)^3\frac{x}{n} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^3\frac{x}{n},$$

$$V < \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{x}{n}\right)^3\frac{x}{n} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{2x}{n}\right)^3\frac{x}{n} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{nx}{n}\right)^3\frac{x}{n}.$$

Der Unterschied beider Cylindersummen ist

$$\frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{nx}{n}\right)^3\frac{x}{n} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\frac{x^4}{n}$$

und hat für unendlich wachsende n die Null zur Grenze. Beide Cylindersummen besitzen demnach eine gemeinschaftliche Grenze $= V$ und zwar ist, wenn wir nur die erste Summe beibehalten,

$V =$ dem Grenzwerthe von:

$$\frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\,\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3}{n^4}\,x^4$$

oder nach einem bekannten Satze

16) *)
$$V = \frac{1}{6}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\,x^4.$$

*) Die obige Formel gewinnt einen geometrisch leicht fassbaren Sinn, wenn man sie in folgende umsetzt:

$$V = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\,x^3\,.\,x$$

Für das Volumen einer Zone, welche von zwei in den Entfernungen x_0 und $x_1 > x_0$ parallel zur yz-Ebene gelegten Querschnitten, von der xy-Ebene und ausserdem von der Fläche begrenzt wird, ergiebt sich hiernach

$$17) \qquad \frac{1}{6}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}(x_1^4 - x_0^4).$$

Besteht dagegen die Begrenzung der Zone aus zwei in den Entfernungen y_0 und $y_1 > y_0$ parallel zur xz-Ebene gelegten Querschnitten und im Uebrigen wieder aus der xy-Ebene und dem hyperbolischen Paraboloid, so stellt der Ausdruck

$$18) \qquad \frac{1}{6}\frac{\sqrt{ab}}{b^2}(y_1^4 - y_0^4)$$

das Volumen jener Zone dar.

---

und sich an die vorige Bestimmung des Querschnittes MPN erinnert; man kann nämlich sagen: der Abschnitt P ist der vierte Theil des umschriebenen (parabolischen) Cylinders. Dieser Satz darf als das stereometrische Correlat des Archimedischen Satzes von der Parabel gelten.

Neuntes Capitel.

Flächen verschiedener Gattung.

---

§. 46.

Erzeugung der Flächen durch Curven.

Nach Analogie der in den §§. 34, 35 und 36 vollständig mitgetheilten Discussion der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades wäre wohl eine Untersuchung über die möglichen verschiedenen Flächen dritten Grades denkbar, doch ist dieselbe wegen ihrer ausserordentlichen Weitläufigkeit bis jetzt noch nicht unternommen worden; dasselbe gilt in noch weiterem Maasse für die Flächen vierten oder höheren Grades, und man hat sich deshalb über den zweiten Grad hinaus auf die Betrachtung einzelner Flächen beschränkt, welche entweder durch besondere geometrische Eigenschaften oder durch ihr Vorkommen bei physikalischen Fragen die Aufmerksamkeit auf sich zogen. Hierin liegt der Grund, warum wir bei der nachfolgenden Besprechung von Flächen verschiedener Gattung nicht mehr von deren Gleichungen ausgehen, sondern umgekehrt aus der Entstehungsweise jeder einzelnen Fläche ihre Gleichung ableiten.

Wir erinnern zunächst an den Umstand, dass jede der vier ersten Flächen zweiten Grades durch eine bewegliche Ellipse, und das hyperbolische Paraboloid durch eine veränderliche Hyperbel beschrieben werden kann, wenn die betreffende Curve parallel einer Ebene $(x\,y)$ fortbewegt wird und gleichzeitig ihre Scheitel auf zwei gegebenen Linien bleiben; allgemeiner aufgefasst liegt hierin ein Mittel zur Erzeugung beliebiger Flächen. Bewegt sich nämlich eine ihrer Natur nach bestimmte ebene Curve s so,

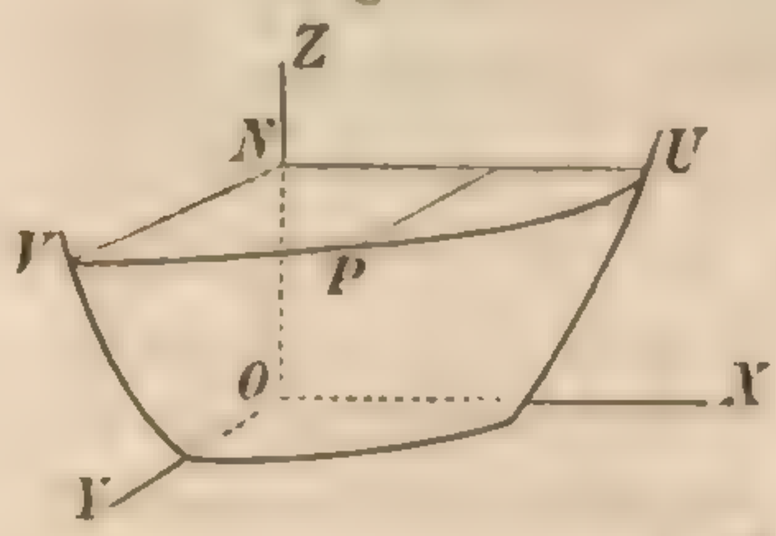
dass sie einer festen Ebene parallel bleibt und ausserdem zwei gegebene Linien s_1 und s_2 schneidet, so beschreibt s im Allgemeinen eine Fläche, deren Gleichung sich aus den vorigen Bedingungen herleiten lässt. Wir wollen einige Fälle der Art betrachten.

1. Elliptische Paraboloide. Wir denken uns drei auf einander senkrechte Ebenen und in zweien derselben beliebige parabolische Curven construirt; lassen wir nun eine veränderliche Ellipse sich so bewegen, dass ihre Ebene der dritten von jenen Ebenen parallel bleibt und zugleich ihre Scheitel auf den gegebenen Parabeln fortrücken, so beschreibt die Peripherie der Ellipse eine Fläche, die im Allgemeinen ein elliptisches Paraboloid heissen mag. Zu ihrer Gleichung gelangt man auf folgende Weise.

Die beiden ersten Ebenen wählen wir zu Coordinatenebenen der xz und yz, und denken uns die beiden Parabeln durch die beiden allgemeinen Gleichungen

1) $$x'' = \varphi(z), \qquad y''' = \psi(z)$$

Fig. 47.



bestimmt, wobei in Beziehung auf die Figur $NU = x''$, $NV = y'''$ und $ON = z$ ist. Für jeden auf der Ellipse UPV, also auch auf der Fläche liegenden Punkt P, dessen Coordinaten x, y, z heissen mögen, gilt weiter die Ellipsengleichung

2) $$\left(\frac{x}{x''}\right)^2 + \left(\frac{y}{y'''}\right)^2 = 1,$$

und hier bedarf es nur der Substitution von x'' und y''' aus Nr. 1), um sofort

3) $$\left(\frac{x}{\varphi(z)}\right)^2 + \left(\frac{y}{\psi(z)}\right)^2 = 1$$

als Gleichung der Fläche zu erhalten.

So hat man z. B., wenn die beiden Leitcurven semicubische Parabeln und durch die Gleichungen

$$x'' = \sqrt{\frac{z^3}{a}}, \qquad y''' = \sqrt{\frac{z^3}{b}}$$

bestimmt sind, als Gleichung der Fläche:

4) $$ax^2 + by^2 = z^3;$$

letztere ist demnach ein elliptisches Paraboloid dritten Grades. Die Gestalt desselben erkennt man leicht aus seiner Entstehungsweise; die Fläche erweitert sich allseitig in der Richtung der po-

sitiven z, läuft für $z = 0$ in eine Spitze aus und hört bei negativen z zu existiren auf. Die zur xy-Ebene nicht parallelen Schnitte sind Curven des dritten Grades. Was die berührende Ebene in einem Punkte der Fläche betrifft, so ist diese nach dem in §. 44, β, angegebenen Verfahren leicht zu bestimmen. Für eine Ebene, welche mit der Fläche die Punkte $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_0 z_1$, $x_0 y_2 z_2$ gemein hat, gilt nämlich die Gleichung

$$\frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0}(\xi - x_0) + \frac{z_2 - z_0}{y_2 - y_0}(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0$$

und zwar ist dabei

$$a x_0^2 + b y_0^2 = z_0^3,$$
$$a x_1^2 + b y_0^2 = z_1^3,$$
$$a x_0^2 + b y_2^2 = z_2^3.$$

Die Subtraction der ersten von der zweiten Gleichung giebt

$$a (x_1 + x_0)(x_1 - x_0) = (z_1^2 + z_1 z_0 + z_0^2)(z_1 - z_0)$$

woraus

$$\frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0} = \frac{a (x_1 + x_0)}{z_1^2 + z_1 z_0 + z_0^2};$$

auf analoge Weise folgt aus der Verbindung der ersten mit der dritten Gleichung

$$\frac{z_2 - z_0}{y_2 - y_0} = \frac{b (y_2 + y_0)}{z_2^2 + z_2 z_0 + z_0^2};$$

substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung der Schnittebene und lässt nachher die Punkte $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_0 z_1$, $x_0 y_2 z_2$ zusammenfallen, so erhält man als Gleichung der berührenden Ebene:

$$\frac{2 a x_0}{3 z_0^2}(\xi - x_0) + \frac{2 b y_0}{3 z_0^2}(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0$$

oder

$$2 a x_0 \xi + 2 b y_0 \eta - 3 z_0^2 \zeta$$
$$= -3 z_0^3 + 2 (a x_0^2 + b y_0^2) = -z_0^3.$$

Bei Weglassung der nicht mehr nöthigen Indices ist

$$-\frac{2 a x}{z^3}\xi - \frac{2 b y}{z^3}\eta + \frac{3}{z}\zeta = 1,$$

und man erkennt hieraus, dass die durch den Punkt xyz gehende Tangentialebene von den Coordinatenachsen die Strecken

$$-\frac{z^3}{2 a x} = -\frac{1}{2}\frac{x''^2}{x}, \qquad -\frac{z^3}{2 b y} = -\frac{1}{2}\frac{y'''^2}{y}, \qquad +\frac{1}{3}z$$

abschneidet, deren Construction sehr einfach sein würde.

Auch die Cubatur einer Kappe oder Zone unserer Fläche unterliegt keiner Schwierigkeit. Ein in der Höhe h parallel zur xy-Ebene geführter Querschnitt ist eine Ellipse und deren Fläche

$$= \pi \sqrt{\frac{h^3}{a}} \cdot \sqrt{\frac{h^3}{b}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} h^3;$$

denken wir uns derartige Schnitte in den Höhen 0, $\frac{z}{n}$, $\frac{2z}{n}$, ... $\frac{(n-1)z}{n}$, $\frac{nz}{n}$ gelegt, so zerfällt die Kappe von der Höhe z in n Schichten, deren jede die Höhe $\frac{z}{n}$ besitzt und grösser als der eingeschriebene, dagegen kleiner als der umschriebene elliptische Cylinder ist. Für das Volumen V der Kappe gelten demzufolge die Ungleichungen

$$V > \frac{\pi}{\sqrt{ab}} 0 \frac{z}{n} + \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{z}{n}\right)^3 \frac{z}{n} + \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{2z}{n}\right)^3 \frac{z}{n} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{(n-1)z}{n}\right)^3 \frac{z}{n},$$

$$V < \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{z}{n}\right)^3 \frac{z}{n} + \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{2z}{n}\right)^3 \frac{z}{n} + \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{3z}{n}\right)^3 \frac{z}{n} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left(\frac{nz}{n}\right)^3 \frac{z}{n};$$

die Differenz der beiden Cylindersummen ist

$$\frac{\pi}{\sqrt{ab}} \frac{z^4}{n}$$

und nähert sich für unendlich wachsende n der Grenze Null, woraus folgt, dass die obigen Cylindersummen einer und derselben Grenze zustreben, welche V selber sein muss. Demnach ist, wenn wir bei der ersten Summe bleiben,

$V =$ dem Grenzwerthe von:

$$\frac{\pi}{\sqrt{ab}} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3}{n^4} z^4$$

d. h. nach einem bekannten arithmetischen Satze

$$V = \tfrac{1}{4} \pi \frac{z^4}{\sqrt{ab}}.$$

Hieraus ergiebt sich das Volumen einer Zone, deren Begrenzungsebenen parallel zur xy-Ebene liegen, indem man dasselbe als Differenz der Volumina zweier Kappen betrachtet.

Nach dem Vorigen kann man leicht elliptische Paraboloide beliebiger Grade construiren; wählt man z. B. als Leitcurven zwei gewöhnliche Parabeln, deren Achsen die x- und die y-Achse sind und welche den Coordinatenanfang zum gemeinschaftlichen Scheitel haben, so treten an die Stelle der Gleichungen 1) die folgenden

$$x'' = \frac{z^2}{a}, \qquad y''' = \frac{z^2}{b},$$

und hieraus ergiebt sich als Gleichung der Fläche

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = z^4;$$

letztere ist demnach ein elliptisches Paraboloid vierten Grades, welches für $b = a$ in das auf Seite 128 erwähnte Rotationsparaboloid übergeht. Als Gleichung der Berührungsebene findet man nach dem allgemeinen Verfahren

$$\frac{a^2 x_0}{2 z_0^3}(\xi - x_0) + \frac{b^2 y_0}{2 z_0^3}(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0$$

oder bei Weglassung der Indices und weiterer Zusammenziehung

$$-\frac{a^2 x}{z^4}\xi - \frac{b^2 y}{z^4}\eta + \frac{2}{z}\zeta = 1;$$

die Tangentialebene im Punkte xyz schneidet demnach auf den Coordinatenachsen die Strecken ab

$$-\frac{z^4}{a^2 x} = -\frac{x''^2}{x}, \qquad -\frac{z^4}{b^2 y} = -\frac{y'''^2}{y}, \qquad +\tfrac{1}{2} z,$$

deren Construction sehr leicht sein würde. — Für das Volumen V einer Kappe von der Höhe z ergiebt sich nach der allgemeinen Methode

$$V = \tfrac{1}{5}\pi \frac{z^5}{ab},$$

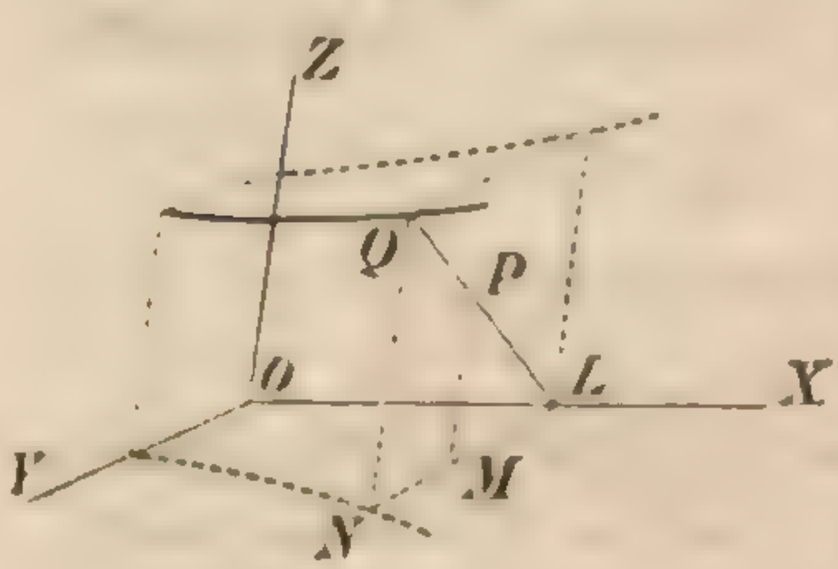
woraus das Volumen einer Zone wie vorhin hergeleitet werden kann.

Die mitgetheilten Betrachtungen lassen noch insofern manche Verallgemeinerung zu, als man die parabolischen Leitlinien durch beliebige andere Curven ersetzen und statt der beweglichen Ellipse irgend eine Curve nehmen kann, deren Natur durch die beiden Strecken $NU = x''$ und $NV = y'''$ bestimmt ist.

2. Keilflächen. Eine veränderliche Gerade möge sich so bewegen, dass sie einer festen Ebene parallel bleibt und ausserdem sowohl eine gegebene Gerade, als eine sonst noch gegebene feste Curve schneidet; die bewegliche Gerade beschreibt in diesem Falle eine Fläche, die längs der festen Geraden in eine Schneide

ausläuft und daher nicht unpassend als eine Keilfläche bezeichnet werden kann. Um ihre Gleichung in möglichst einfacher Form zu erhalten, nehmen wir die feste Gerade zur x-Achse und die feste Ebene zur yz-Ebene; bezeichnen jetzt x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes P der beweglichen Geraden und $x' y' z'$ die Coordinaten ihres Durchschnittes Q mit der Curve, so können, der ersten Bedingung zufolge, die Gleichungen der beweglichen Geraden durch

Fig. 48.



$$x = x', \qquad z = \frac{z'}{y'} y$$

dargestellt werden. Ferner gelten für den Punkt $x' y' z'$ die Gleichungen der gegebenen Curve etwa

$$5) \qquad y' = \varphi(x'), \qquad z' = \psi(x'),$$

und nun ergiebt sich aus den vier aufgestellten Gleichungen durch Elimination von x', y', z'

$$6) \qquad z = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} y$$

als Gleichung der beschriebenen Fläche.

Ist z. B. die Leitcurve eine Gerade, mithin

$$y' = Bx' + b, \qquad z' = Cx' + c,$$

so lautet die Gleichung der erzeugten Fläche

$$z = \frac{Cx + c}{Bx + b} y$$

oder

$$Cxy - Bxz + cy - bz = 0;$$

letztere ist demnach ein hyperbolisches Paraboloid, wie schon in §. 43 Aufgabe 7 gefunden wurde.

Wenn die feste Gerade senkrecht auf der festen Ebene steht und die Leitcurve eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt auf der z-Achse und deren Ebene parallel zur xy-Ebene liegt, so gelten für y' und z' die Gleichungen

$$y' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x'^2}, \qquad z' = c$$

und daraus ergiebt sich als Gleichung der elliptischen Keilfläche

$$z = \frac{acy}{b\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Die horizontalen Schnitte derselben sind Ellipsen, denn für $z = h$ erhält man

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{bh}{c}}\right)^2 = 1;$$

alle sonstigen zur yz-Ebene nicht parallelen Schnitte geben Curven vierten Grades.

Die durch den Punkt xyz gehende Berührungsebene bestimmt sich wie früher auf die Weise, dass man durch die Punkte xyz, $x_1 y z_1$, $x y_2 z_2$ zunächst eine Schnittebene legt und nachher diese Punkte zusammenfallen lässt. Die Gleichung der genannten Ebene ist

$$\frac{z_1 - z}{x_1 - x}(\xi - x) + \frac{z_2 - z}{y_2 - y}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0$$

und vermöge der Gleichung der Fläche

$$\frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{acy\left(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x_1^2}\right)}{b\sqrt{a^2 - x_1^2}\sqrt{a^2 - x^2}\,(x_1 - x)},$$

$$\frac{z_2 - z}{y_2 - y} = \frac{ac}{b\sqrt{a^2 - x^2}};$$

der erste Quotient rechter Hand bedarf noch einer Transformation und zwar besteht dieselbe darin, dass man Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x_1^2}$$

multiplicirt, wodurch der Zähler rational $= x_1^2 - x^2 = (x_1 + x)(x_1 - x)$ wird. Nach Hebung des letzten Factors bleibt

$$\frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{acy}{b\sqrt{(a^2 - x_1^2)(a^2 - x^2)}\left[\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x_1^2}\right]};$$

setzt man diese Werthe in die Gleichung der Schnittebene ein und lässt dann die Punkte xyz, $x_1 y z_1$, $x y_2 z_2$ zusammenfallen, so bleibt als Gleichung der Tangentialebene:

$$\frac{ac\,xy}{b\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}(\xi - x) + \frac{ac}{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0,$$

oder, wenn $\sqrt{a^2 - x^2}$ durch z ausgedrückt und das Gleichartige vereinigt wird,

$$\frac{1}{x}\xi + \frac{a^2 c^2 y}{b^2 x^2 z^2}\eta - \frac{a^2 c^2 y^2}{b^2 x^2 z^3}\zeta = 1.$$

Um das Volumen einer Kappe von der Höhe z zu ermitteln, benutzen wir wieder die Methode der ein- und umschriebenen Cylinder; letztere sind elliptische Cylinder, weil der in der Höhe h

parallel zur xy-Ebene gelegte Querschnitt eine aus den Halbachsen a und $\frac{bh}{c}$ construirte Ellipse ist, deren Fläche $\pi \frac{abh}{c}$ beträgt. Hiernach überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Ungleichungen

$$V > \pi \frac{ab}{c} 0 \frac{z}{n} + \pi \frac{ab}{c} \frac{z}{n} \frac{z}{n} + \pi \frac{ab}{c} \frac{2z}{n} \frac{z}{n} + \ldots$$

$$\ldots + \pi \frac{ab}{c} \frac{(n-1)z}{n} \frac{z}{n},$$

$$V < \pi \frac{ab}{c} \frac{z}{n} \frac{z}{n} + \pi \frac{ab}{c} \frac{2z}{n} \frac{z}{n} + \pi \frac{ab}{c} \frac{3z}{n} \frac{z}{n} + \ldots$$

$$\ldots + \pi \frac{ab}{c} \frac{nz}{n} \frac{z}{n};$$

man zieht daraus

$V =$ dem Grenzwerthe von:

$$\pi \frac{ab}{c} \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)}{n^2} z^2$$

und durch Ausführung des Grenzenüberganges

$$V = \tfrac{1}{2} \pi \frac{ab}{c} z^2.$$

Das Volumen einer Zone des elliptischen Keiles ist hiernach leicht zu finden.

§. 47.

Fusspunkteflächen.

Denkt man sich durch einen beliebigen Punkt P einer gegebenen Fläche an diese eine Berührungsebene gelegt und auf letztere von einem festen Punkte C eine Senkrechte herabgelassen, deren Fusspunkt Q heissen möge, so entspricht jedem Punkte P ein neuer Punkt Q im Raume, und wenn P die gegebene Fläche durchläuft, so wird auch der Punkt Q eine gewisse Fläche beschreiben, welche man die entsprechende Fusspunktenfläche nennen kann. Nicht ohne Interesse sind die aus den Flächen zweiten Grades abgeleiteten Fusspunktenflächen, deren Betrachtung uns im Folgenden beschäftigen wird.

Die centralen Flächen zweiten Grades lassen sich, wenn die Hauptachsen zu Coordinatenachsen genommen werden, durch die allgemeine Gleichung

1) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$$

ausdrücken, und die Gleichung der Berührungsebene im Punkte xyz ist dann

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = D.$$

Eine Senkrechte vom Mittelpunkte der Fläche (dem Coordinatenanfange) auf die Tangentialebene schneidet letztere in einem Punkte, dessen Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 nach §. 19 Nr. 21 gefunden werden; sie sind

$$2)\quad \begin{cases} \xi_0 = \dfrac{ADx}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}, \\ \eta_0 = \dfrac{BDy}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}, \\ \zeta_0 = \dfrac{CDz}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}. \end{cases}$$

Die Gleichung der Fusspunktenfläche darf ausser ξ_0, η_0, ζ_0 nur noch die bekannten Grössen A, B, C, D enthalten und ist folglich durch Elimination von x, y, z aus den Gleichungen 1) und 2) zu entwickeln. Aus Nr. 2) findet man einerseits:

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = \frac{D^2}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2},$$

andererseits bei Rücksicht auf die Gleichung 1)

$$D\left(\frac{\xi_0^2}{A} + \frac{\eta_0^2}{B} + \frac{\zeta_0^2}{C}\right) = \frac{D^4}{(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2)^2},$$

die rechte Seite dieser Gleichung ist das Quadrat von der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung, mithin

$$(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2)^2 = D\left(\frac{\xi_0^2}{A} + \frac{\eta_0^2}{B} + \frac{\zeta_0^2}{C}\right)$$

oder, wenn man x, y, z für ξ_0, η_0, ζ_0 schreibt,

$$3)\quad \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{D} = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}.$$

Demnach ist für die Fusspunktenfläche des dreiachsigen Ellipsoides:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2,$$

des einfachen Hyperboloides:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2,$$

und des getheilten Hyperboloides:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = -a^2x^2 - b^2y^2 + c^2z^2.$$

Diese drei Flächen besitzen gemeinschaftlich eine bemerkenswerthe Eigenschaft; schneidet man nämlich die Fläche 3) durch eine concentrische Kugelfläche mit dem Halbmesser r, so gilt für alle

Punkte der Durchschnittslinie ausser der Gleichung 3) noch die folgende

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

oder

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = r^2 (x^2 + y^2 + z^2),$$

deren Substitution in Nr. 3) giebt

$$\frac{r^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{D} = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}$$

oder

$$\left(\frac{r^2}{D} - \frac{1}{C}\right) z^2 = \left(\frac{1}{A} - \frac{r^2}{D}\right) x^2 + \left(\frac{1}{B} - \frac{r^2}{D}\right) y^2.$$

Diese Gleichung repräsentirt einen elliptischen Kegel, die Schnittcurve ist also ein sphärischer Kegelschnitt.

Die nichtcentralen Flächen zweiten Grades können durch die allgemeine Gleichung

4) $$Ax^2 + By^2 = 2z$$

ausgedrückt werden, derzufolge die Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz ist:

$$Ax\xi + By\eta - \zeta = z.$$

Eine Senkrechte vom Scheitel der Fläche (dem Coordinatenanfange) auf die Berührungsebene schneidet letztere in einem Punkte $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$, dessen Coordinaten sind:

5) $$\begin{cases} \xi_0 = \dfrac{Axz}{A^2x^2 + B^2y^2 + 1}, \\ \eta_0 = \dfrac{Byz}{A^2x^2 + B^2y^2 + 1}, \\ \zeta_0 = \dfrac{-z}{A^2x^2 + B^2y^2 + 1}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt erstens

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = \frac{z^2}{A^2x^2 + B^2y^2 + 1},$$

ferner unter Rücksicht auf Nr. 4)

$$\frac{\xi_0^2}{A} + \frac{\eta_0^2}{B} = \frac{2z^3}{(A^2x^2 + B^2y^2 + 1)^2};$$

multiplicirt man das erste Ergebniss mit $2\zeta_0$ und vereinigt es mit dem zweiten, so erhält man als Gleichung der Fusspunktenfläche

$$2(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2)\zeta_0 + \frac{\xi_0^2}{A} + \frac{\eta_0^2}{B} = 0,$$

oder, wenn x, y, $-z$ für ξ_0, η_0, ζ_0 geschrieben wird,

6) $$(x^2 + y^2 + z^2)\, z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B}\right).$$

Hiernach ist für die Fusspunktenfläche des elliptischen Paraboloides:

$$(x^2 + y^2 + z^2)\, z = \tfrac{1}{2}(a x^2 + b y^2),$$

und des hyperbolischen Paraboloides:

$$(x^2 + y^2 + z^2)\, z = \tfrac{1}{2}(a x^2 - b y^2).$$

Die auf der z-Achse senkrechten (horizontalen) Querschnitte der ersten Fläche sind Ellipsen, die der zweiten Hyperbeln; jeder die z-Achse in sich enthaltende Schnitt ist die Fusspunktencurve einer Parabel (eine Cissoide). Schneidet man die erste Fusspunktenfläche durch eine aus dem Halbmesser r beschriebene Kugelfläche, so genügt jeder Punkt des Schnittes der Gleichung

$$r^2 z = \tfrac{1}{2}(a x^2 + b y^2),$$

d. h. geometrisch, es lässt sich immer ein elliptisches Paraboloid angeben, welches mit der Kugel denselben Schnitt bildet wie jene Fusspunktenfläche; eine ähnliche Eigenschaft besitzt die Fusspunktenfläche des hyperbolischen Paraboloides.

§. 48.

Schraubenlinie und Schraubenfläche.

I. Wenn die Ebene eines gegebenen Winkels BAC dergestalt um einen geraden Kreiscylinder herumgewickelt wird, dass der eine Winkelschenkel AB mit einem normalen Querschnitte des Cylinders zusammenfällt, so beschreibt der andere Winkelschenkel AC auf der Cylinderfläche eine Curve, welche die Schraubenlinie genannt wird; der Halbmesser des Cylinders heisst ihr Radius, und der constante Winkel ihr Steigungswinkel. Um die Schraubenlinie vollständig zu erhalten, muss man sich den gegebenen Winkel durch seinen Scheitelwinkel ergänzt und diesen gleichzeitig mit aufgewickelt denken; die Curve erstreckt sich daher sowohl auf- als abwärts von dem normalen Querschnitte ins Unendliche. Ferner ist zu berücksichtigen, dass jene Umwickelung auf zwei verschiedene Weisen — rechts herum und links

Fig. 49.

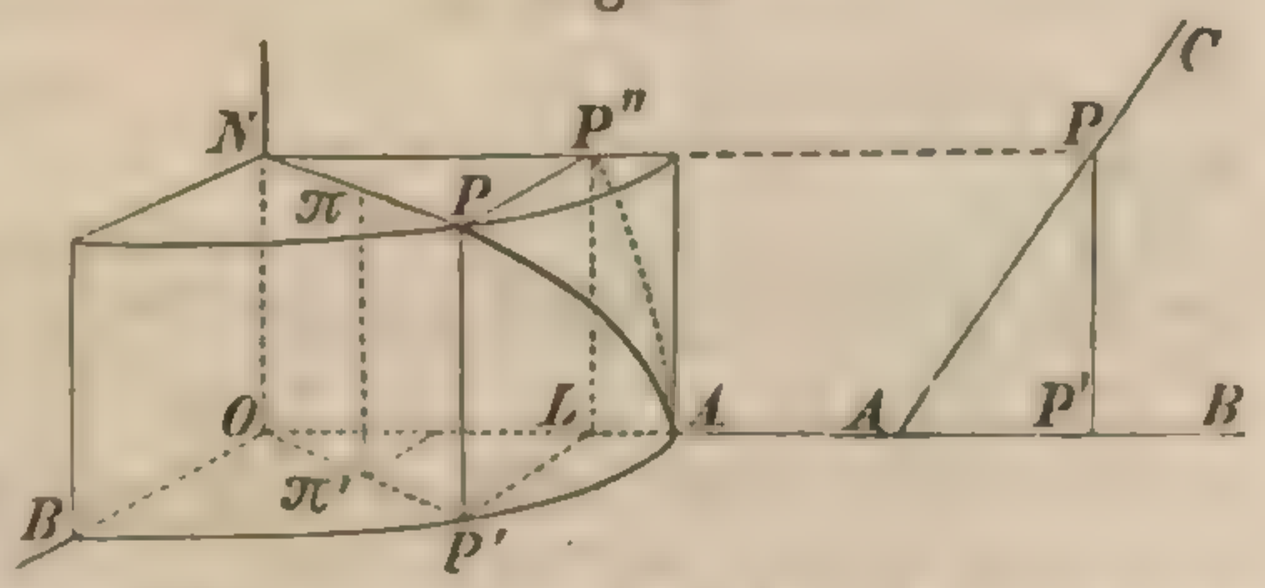
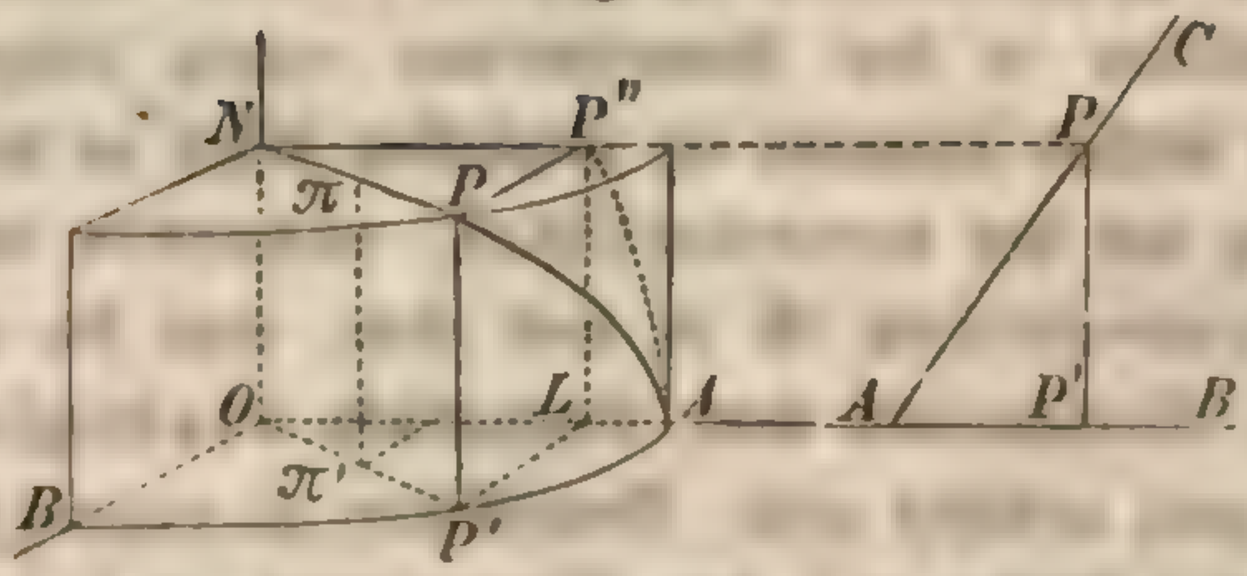


Fig. 49.



herum — geschehen kann, dass also aus den gegebenen Daten (Steigungswinkel und Radius) zwei symmetrisch gleiche Schraubenlinien construirbar sind, welche man durch die Benennungen rechtsgängige und linksgängige Schraubenlinie zu unterscheidan pflegt; die Figur zeigt einen Theil der letzteren, nebst deren Verticalprojection.

Um die Gleichungen der Schraubenlinie zu erhalten, nehmen wir die Cylinderachse zur z-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen xy-Ebene mit der Ebene des genannten normalen Querschnittes zusammenfallen möge; den Punkt A, in welchem letztere von der Schraubenlinie getroffen wird, verbinden wir mit dem Mittelpunkte des Querschnittes durch eine Gerade, und wählen letztere zur Achse der x. Der Radius $OA = OB$ sei $= r$, der Steigungswinkel $BAC = \alpha$. Ist nun P ein beliebiger Punkt des Schenkels AC und P' seine Projection auf den Schenkel AB, so kommt bei der Aufwickelung P' so auf den normalen Querschnitt $AP'B$ zu liegen, dass der Bogen AP' gleich der vorherigen Geraden AP' wird; die Linie $P'P$ dagegen bleibt gerade und fällt auf eine der erzeugenden Geraden des Cylinders. Bezeichnen wir die drei Coordinaten des Punktes P der Schraubenlinie mit $OL = x$, $LP' = PP'' = y$, $P'P = LP'' = z$ und den Bogen AP' mit s, so ist

$$x = OP' \cos AOP' = r \cos \frac{s}{r},$$

$$y = OP' \sin AOP' = r \sin \frac{s}{r},$$

und in dem ebenen rechtwinkligen Dreiecke PAP'

$$PP' = AP' \cdot \tan \alpha \text{ d. h. } z = s \tan \alpha;$$

der Werth von s, aus der letzten Gleichung in die vorhergehenden substituirt, giebt

$$x = r \cos \frac{z}{r \tan \alpha}, \qquad y = r \sin \frac{z}{r \tan \alpha}.$$

Die Grösse $r \tan \alpha$ bedeutet geometrisch dasjenige z der Schraubenlinie, welches für $s = r$ d. h. für $\angle AOP' = 57^0\,17'\,44''\,8$ zum Vorschein kommt; diese bestimmte und für jede gegebene Schraubenlinie unveränderliche Grösse wollen wir den Parameter der Curve nennen und mit c bezeichnen; es sind jetzt

$$1) \qquad x = r \cos \frac{z}{c}, \qquad y = r \sin \frac{z}{c}$$

die Gleichungen der Verticalprojectionen der Schraubenlinie, woraus sich noch

$$2) \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

als Gleichung der Horizontalprojection findet. Für die Schraubenlinie entgegengesetzter Drehung (rechtsgängig) ändert der Bogen s sein Vorzeichen und die Gleichungen werden daher

$$3) \quad x = r \cos \frac{z}{c}, \qquad y = -r \sin \frac{z}{c}, \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Nimmt man in den Gleichungen 1) erst $z = 0$ und nachher $z = \pi c$, so erhält man im ersten Falle $x = +r$, im zweiten $x = -r$; bei einem halben Umgange steigt also die Schraubenlinie um πc, bei einem ganzen Umgange um $2\pi c$, letztere Grösse pflegt man daher die Höhe eines Schraubenganges zu nennen.

Die gerade Verbindungslinie zweier Punkte xyz und $x_1 y_1 z_1$ der betrachteten Curve kann durch folgende Gleichungen dargestellt werden

$$4) \quad \xi - x = \frac{x_1 - x}{z_1 - z}(\zeta - z), \qquad \eta - y = \frac{y_1 - y}{z_1 - z}(\zeta - z),$$

wobei die vorkommenden Quotienten kurz M und N heissen mögen; da die genannten Punkte der Schraubenlinie angehören, so ist

$$x_1 - x = r\left(\cos \frac{z_1}{c} - \cos \frac{z}{c}\right)$$

$$= -2r \sin \frac{z_1 + z}{2c} \sin \frac{z_1 - z}{2c},$$

$$y_1 - y = r\left(\sin \frac{z_1}{c} - \sin \frac{z}{c}\right)$$

$$= -2r \cos \frac{z_1 + z}{2c} \sin \frac{z_1 - z}{2c},$$

woraus sich ergiebt

$$M = -\frac{r}{c}\sin\frac{z_1+z}{2c}\frac{\sin\frac{z_1-z}{2c}}{\frac{z_1-z}{2c}},$$

$$N = +\frac{r}{c}\cos\frac{z_1+z}{2c}\frac{\sin\frac{z_1-z}{2c}}{\frac{z_1-z}{2c}}.$$

Lassen wir den Punkt $x_1 y_1 z_1$ dem als fest gedachten Punkte $x\,y\,z$ immer näher rücken, so dreht sich die Verbindungsgerade (Secante) um den ersten Punkt und nähert sich mehr und mehr der tangentialen Lage; letztere tritt in dem Grenzfalle $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$ ein und diesem entsprechen gewisse Grenzwerthe von M und N, welche sich aus dem bekannten Satze ergeben, dass der Quotient $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$ bei verschwindenden ϑ in die Einheit übergeht.

Jene Grenzwerthe sind demnach

$$-\frac{r}{c}\sin\frac{z}{c} = -\frac{y}{c} \text{ und } +\frac{r}{c}\cos\frac{z}{c} = +\frac{x}{c};$$

die Gleichungen 4) werden jetzt zu den folgenden

$$5)\quad \xi - x = -\frac{y}{c}(\zeta - z), \qquad \eta - y = +\frac{x}{c}(\zeta - c)$$

und bestimmen die im Punkte $x\,y\,z$ an die Schraubenlinie gelegte Tangente. Aus den vorstehenden Gleichungen zieht man noch

$$x(\xi - x) + y(\eta - y) = 0$$

oder

$$x\xi + y\eta = x^2 + y^2 = r^2,$$

d. h. geometrisch die Horizontalprojection der Tangente berührt die kreisförmige Horizontalprojection der Curve, wie zu erwarten war. Die Tangentenconstruction ist hiernach sehr einfach; in der $x\,y$-Ebene legt man nämlich durch den Punkt P' eine Tangente an den mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis, in der $x\,z$-Ebene zieht man durch den Punkt P'' eine Gerade, welche mit der x-Achse einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente $= -\frac{c}{y}$ ist; die erhaltenen Geraden sind die Horizontal- und die Verticalprojection der gesuchten Tangente.

Die im Berührungspunkte der letzteren senkrecht zu ihr gelegte Ebene heisst die Normalebene im Punkte $x\,y\,z$; aus den beiden genannten Bedingungen findet man leicht als deren Gleichung

$$-\frac{y}{c}(\xi - x) + \frac{x}{c}(\eta - y) + \zeta - z = 0$$

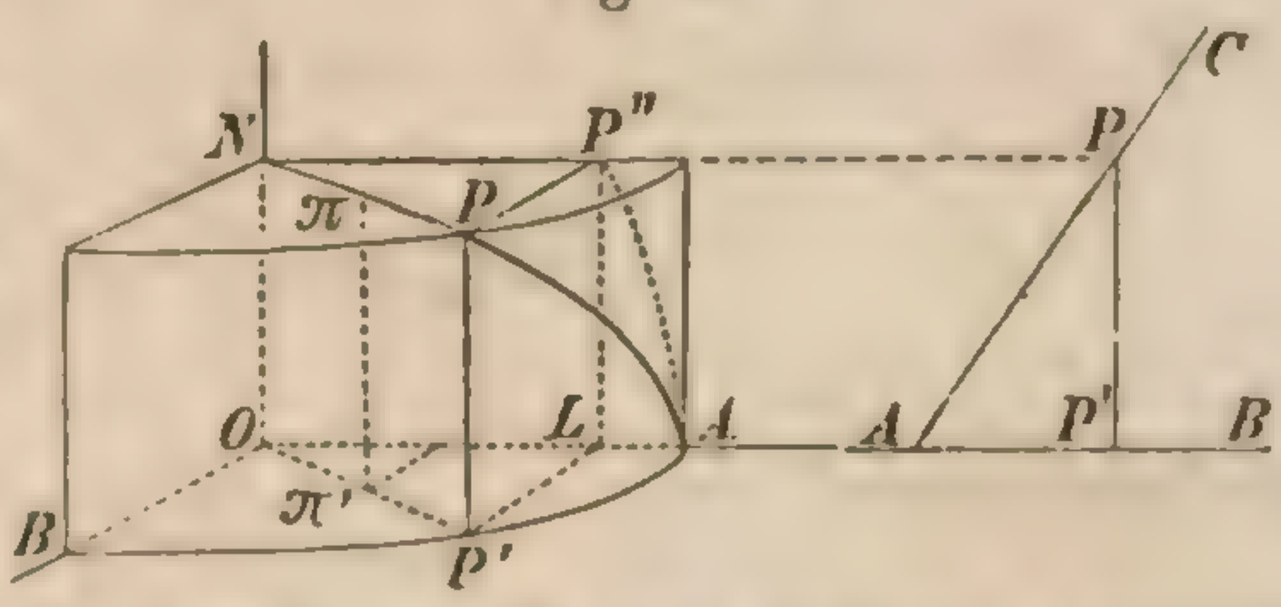
oder

$$6) \qquad -\frac{y}{cz}\xi + \frac{x}{cz}\eta + \frac{1}{z}\zeta = 1,$$

wonach auch die direkte Construction der Normalebene (oder ihrer Spuren) sehr leicht ist.

II. Lässt man eine Gerade sich so bewegen, dass sie an der Schraubenlinie hingleitet und zugleich die Achse der Schraubenlinie senkrecht schneidet, so beschreibt sie eine sogenannte Schraubenfläche; in der Figur ist NP die bewegliche Gerade in einer ihrer Lagen. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes Π der beweglichen Geraden (also auch der Fläche) mögen ξ, η, ζ und x, y, z die Coordinaten des Punktes P heissen, in welchen sie die Schraubenlinie schneidet; die Gleichungen der veränderlichen Geraden sind in diesem Falle

Fig. 49.



$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} \text{ und } \zeta = z,$$

setzt man die Werthe von x und y aus Nr. 1) ein, so ist

$$\frac{\eta}{\xi} = tan\,\frac{z}{c} = tan\,\frac{\zeta}{c}$$

die Gleichung der Schraubenfläche, wobei im Folgenden wieder x, y, z für ξ, η, ζ also

$$7) \qquad \frac{y}{x} = tan\,\frac{z}{c}$$

geschrieben werden möge. Bei Zugrundelegung der rechtsgängigen Schraubenlinie ergiebt sich

$$\frac{y}{x} = -\,tan\,\frac{z}{c}$$

als Gleichung der entsprechenden Schraubenfläche.

Eine Ebene, welche mit der Fläche die Punkte xyz, $x_1 y z_1$ und $x y_2 z_2$ gemein hat, wird repräsentirt durch die Gleichung

$$8) \quad \frac{z_1 - z}{x_1 - x}(\xi - x) + \frac{z_2 - z}{y_2 - y}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0,$$

wobei für jene Punkte die Bedingungen

$$\frac{y}{x} = tan\,\frac{z}{c}, \qquad \frac{y}{x_1} = tan\,\frac{z_1}{c}, \qquad \frac{y_2}{x} = tan\,\frac{z_2}{c}$$

erfüllt sein müssen. Unter Benutzung der bekannten Formel

$$tan\,u - tan\,v = \frac{sin\,(u-v)}{cos\,u\;cos\,v}$$

zieht man aus jenen Gleichungen, indem man die erste von der zweiten und von der dritten subtrahirt

$$-y\,\frac{x_1 - x}{x_1\,x} = \frac{sin\,\dfrac{z_1 - z}{c}}{cos\,\dfrac{z_1}{c}\;cos\,\dfrac{z}{c}},$$

$$\frac{y_2 - y}{x} = \frac{sin\,\dfrac{z_2 - z}{c}}{cos\,\dfrac{z_2}{c}\;cos\,\dfrac{z}{c}},$$

dies giebt weiter

$$\frac{z_1 - z}{x_1 - x} = -\frac{cy}{x_1\,x}\;cos\,\frac{z_1}{c}\;cos\,\frac{z}{c}\;\frac{\dfrac{z_1 - z}{c}}{sin\,\dfrac{z_1 - z}{c}},$$

$$\frac{z_2 - z}{y_2 - y} = +\frac{c}{x}\;cos\,\frac{z_2}{c}\;cos\,\frac{z}{c}\;\frac{\dfrac{z_2 - z}{c}}{sin\,\dfrac{z_2 - z}{c}}.$$

Lassen wir die Punkte xyz, x_1yz_1 und xy_2z_2 zusammenrücken, so geht die schneidende Ebene in die berührende Ebene über und die Quotienten $\frac{z_1 - z}{x_1 - x}$, $\frac{z_2 - z}{y_2 - y}$ erhalten gewisse Grenzwerthe, die sich aus dem Satze ergeben, dass der Quotient $\frac{\vartheta}{sin\,\vartheta}$ für $\vartheta = 0$ zur Einheit wird. Die betreffenden Grenzwerthe sind

$$-\frac{cy}{x^2}\left(cos\,\frac{z}{c}\right)^2 \text{ und } \frac{c}{x}\left(cos\,\frac{z}{c}\right)^2$$

oder, wenn $cos\,\frac{z}{c}$ durch $tan\,\frac{z}{c} = \frac{y}{x}$ ausgedrückt wird,

$$-\frac{cy}{x^2+y^2} \text{ und } +\frac{cx}{x^2+y^2}.$$

Die Gleichung 8) wird jetzt

$$-\frac{cy}{x^2+y^2}(\xi-x)+\frac{cx}{x^2+y^2}(\eta-y)-(\zeta-z)=0$$

und nach gehöriger Zusammenziehung

$$9)\qquad \frac{cy}{(x^2+y^2)z}\xi-\frac{cx}{(x^2+y^2)z}\eta+\frac{1}{z}\zeta=1;$$

sie bestimmt die Tangentialebene im Punkte xyz. Letztere ist sehr leicht mittelst der Abschnitte zu construiren, welche sie auf den Achsen bildet.

Aus der Gleichung 9) findet man noch

$$10)\ \xi-x=\frac{cy}{x^2+y^2}(\zeta-z),\qquad \eta-y=-\frac{cx}{x^2+y^2}(\zeta-z)$$

als Gleichungen der im Punkte xyz auf der Schraubenfläche errichteten Normalen.

Zehntes Capitel.

Analytische Projectionslehre.

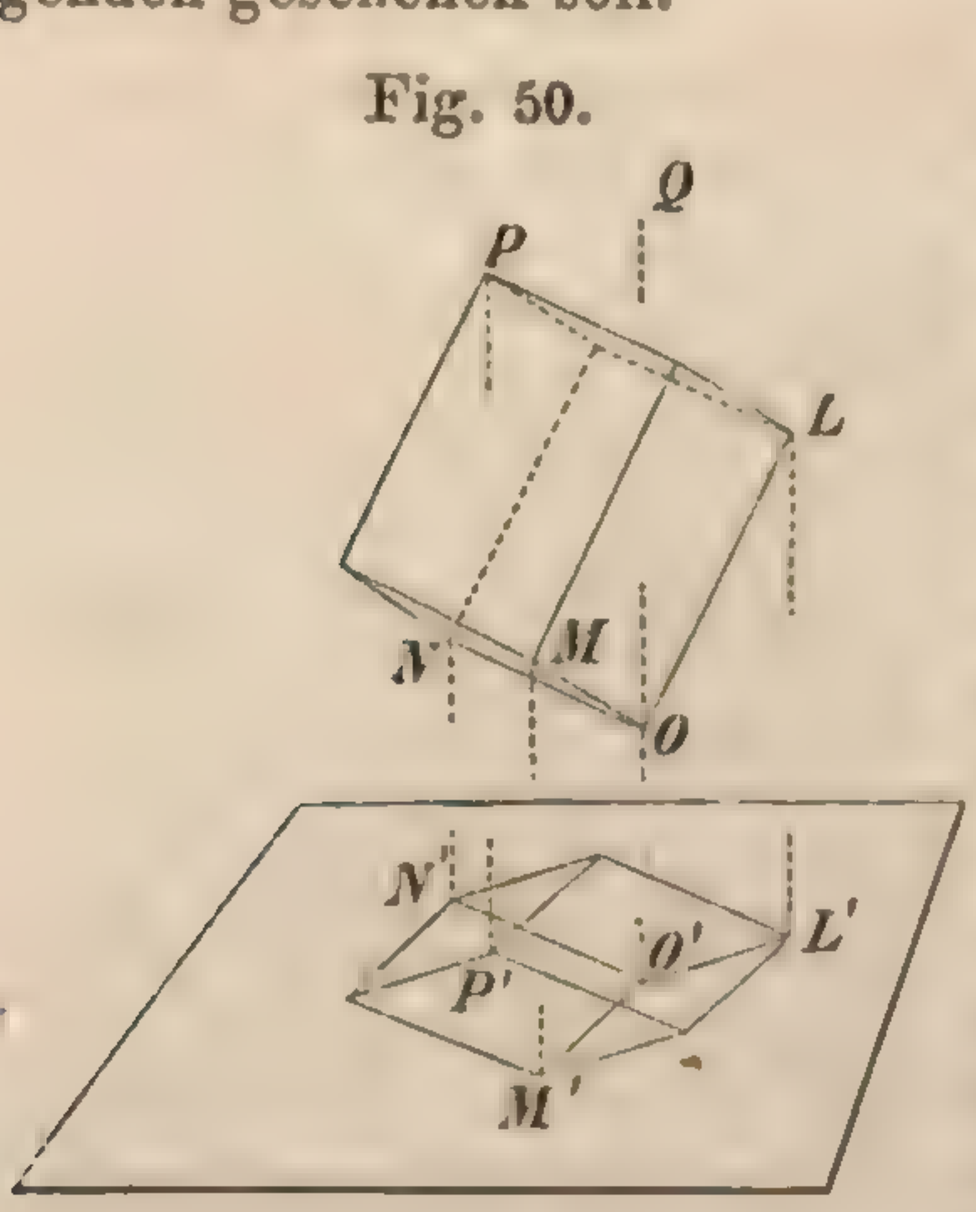
---

§. 49.

Die axonometrische Projection.

Wenn es darauf ankommt, räumliche Gegenstände durch Zeichnung in einer Ebene graphisch darzustellen, so hat man bekanntlich eine doppelte Wahl, insofern dazu ebensowohl die Parallelprojection als die perspectivische Projection benutzt werden kann. Die Mittel zur Ausführung der Zeichnung selbst giebt die descriptive Geometrie, deren Kenntniss wir voraussetzen, sie lassen sich aber auch unabhängig von dieser entwickeln, wenn man die Aufgabe vom analytischen Gesichtspunkte aus ansieht, wie es im Folgenden geschehen soll.

Fig. 50.



Wir denken uns einen Punkt P auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen und durch die Coordinaten $OL = x$, $OM = y$, $ON = z$ gegeben; das ganze Liniensystem werde rechtwinklig auf eine bestimmte Ebene projicirt und es soll nun die gegenseitige Lage der Projectionen O', L', M', N', P' ermittelt werden. Da die orthogonalen Projectionen zweier parallelen Geraden wiederum parallel sind, so besteht die Projection des

erwähnten Liniensystemes aus zwölf Geraden (den Projectionen der zwölf Kanten des aus x, y, z construirten Parallelopipedes), von denen je vier parallel laufen, und es ist dieser Liniencomplex bestimmt, wenn man die drei Geraden $O'L' = x'$, $O'M' = y'$, $O'N' = z'$ und die von ihnen eingeschlossenen Winkel kennt.

Bezeichnen wir die Stellungswinkel der Projectionsebene mit

$$\angle LOQ = \alpha, \qquad \angle MOQ = \beta, \qquad \angle NOQ = \gamma,$$

und die Neigungswinkel der Achsen OL, OM, ON gegen die Projectionsebene mit λ, μ, ν, so ist zunächst

$$\lambda = 90^0 - \alpha, \qquad \mu = 90^0 - \beta, \qquad \nu = 90^0 - \gamma,$$

mithin, wenn diese Werthe in die Formel

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

substituirt werden,

$$1) \qquad \begin{cases} \sin^2\lambda + \sin^2\mu + \sin^2\nu = 1, \\ \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 2. \end{cases}$$

Was die Grössen von x', y', z' anbelangt, so hat man unmittelbar

$$2) \quad x' = x\cos\lambda, \qquad y' = y\cos\mu, \qquad z' = z\cos\nu;$$

um die zwischen x', y' z' liegenden Winkel zu finden, bedarf es nur der Erinnerung an den bekannten Satz, dass die Projection einer ebenen Fläche auf eine andere Ebene gleich der ersten Fläche, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels zwischen beiden Ebenen ist. Wendet man ihn der Reihe nach auf die Dreiecke LOM, LON, MON und ihre Projectionen an indem man berücksichtigt, dass der Winkel zwischen zwei Ebenen gleich dem Winkel zwischen ihren Normalen ist, so hat man als Projectionen jener Dreiecksflächen:

$$\tfrac{1}{2}xy\sin\nu, \qquad \tfrac{1}{2}xz\sin\mu, \qquad \tfrac{1}{2}yz\sin\lambda;$$

durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ausgedrückt, sind die nämlichen Flächen $L'O'M'$, $L'O'N'$, $M'O'N'$:

$$\tfrac{1}{2}x'y'\sin(x'y'), \qquad \tfrac{1}{2}x'z'\sin(x'z'), \qquad \tfrac{1}{2}y'z'\sin(y'z'),$$

und aus der Vergleichung der gleichnamigen Flächen folgen die Formeln:

$$3) \qquad \begin{cases} \sin(x'y') = \dfrac{xy}{x'y'}\sin\nu, \qquad \sin(x'z') = \dfrac{xz}{x'z'}\sin\mu, \\ \sin(y'z') = \dfrac{yz}{y'z'}\sin\lambda, \end{cases}$$

oder auch, wenn man Alles durch λ, μ, ν ausdrückt,

$$4)\quad \begin{cases} \sin(x'y') = \dfrac{\sin\nu}{\cos\lambda\cos\mu}, \qquad \sin(x'z') = \dfrac{\sin\mu}{\cos\lambda\cos\nu}, \\ \sin(y'z') = \dfrac{\sin\lambda}{\cos\mu\cos\nu}. \end{cases}$$

Für den praktischen Gebrauch der erwähnten Projectionsmethode bedürfen diese Formeln noch einer Modification; in der Regel sieht man nämlich nicht die Winkel λ, μ, ν als unmittelbar bekannt an, sondern man setzt voraus, dass die Projectionen von drei gleichen auf den Achsen abgeschnittenen Strecken (von den in O zusammentreffenden Kanten eines Würfels) gegeben seien und berechnet hieraus rückwärts λ, μ, ν und die Winkel $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$. Dies geschieht auf folgende Weise. Die auf jeder Achse abgeschnittene Strecke sei d und ihre Projectionen mögen a', b', c' heissen; die vorigen Formeln geben dann für $x = y = z = d$ und $x' = a'$, $y' = b'$, $z' = c'$

$$5)\quad a' = d\cos\lambda, \qquad b' = d\cos\mu, \qquad c' = d\cos\nu$$

oder wenn man quadrirt und addirt

$$6)\quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 2d^2.$$

Durch Substitution des hieraus folgenden Werthes von d liefern die vorhergehenden Gleichungen die Werthe

$$7)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{a'\sqrt{2}}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \\ \cos\mu = \dfrac{b'\sqrt{2}}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \\ \cos\nu = \dfrac{c'\sqrt{2}}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \end{cases}$$

an welche sich die nachstehenden reihen:

$$8)\quad \begin{cases} \sin\lambda = \sqrt{\dfrac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \\ \sin\mu = \sqrt{\dfrac{a'^2 + c'^2 - b'^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \\ \sin\nu = \sqrt{\dfrac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2}}. \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Werthe lassen sich die Formeln 4) durch die folgenden ersetzen:

$$9)\quad \begin{cases} \sin(x'y') = \dfrac{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)(a'^2+b'^2-c'^2)}}{2a'b'}, \\ \sin(x'z') = \dfrac{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)(a'^2+c'^2-b'^2)}}{2a'c'}, \\ \sin(y'z') = \dfrac{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)(b'^2+c'^2-a'^2)}}{2b'c'}. \end{cases}$$

Bemerkenswerth ist die hieraus folgende leichte Construction der Winkel $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$. Setzt man nämlich

$$\angle(x'y') = 90^0 + \tfrac{1}{2}C, \quad \angle(x'z') = 90^0 + \tfrac{1}{2}B, \quad \angle(y'z') = 90^0 + \tfrac{1}{2}A,$$

so zeigen die nunmehrigen Formeln

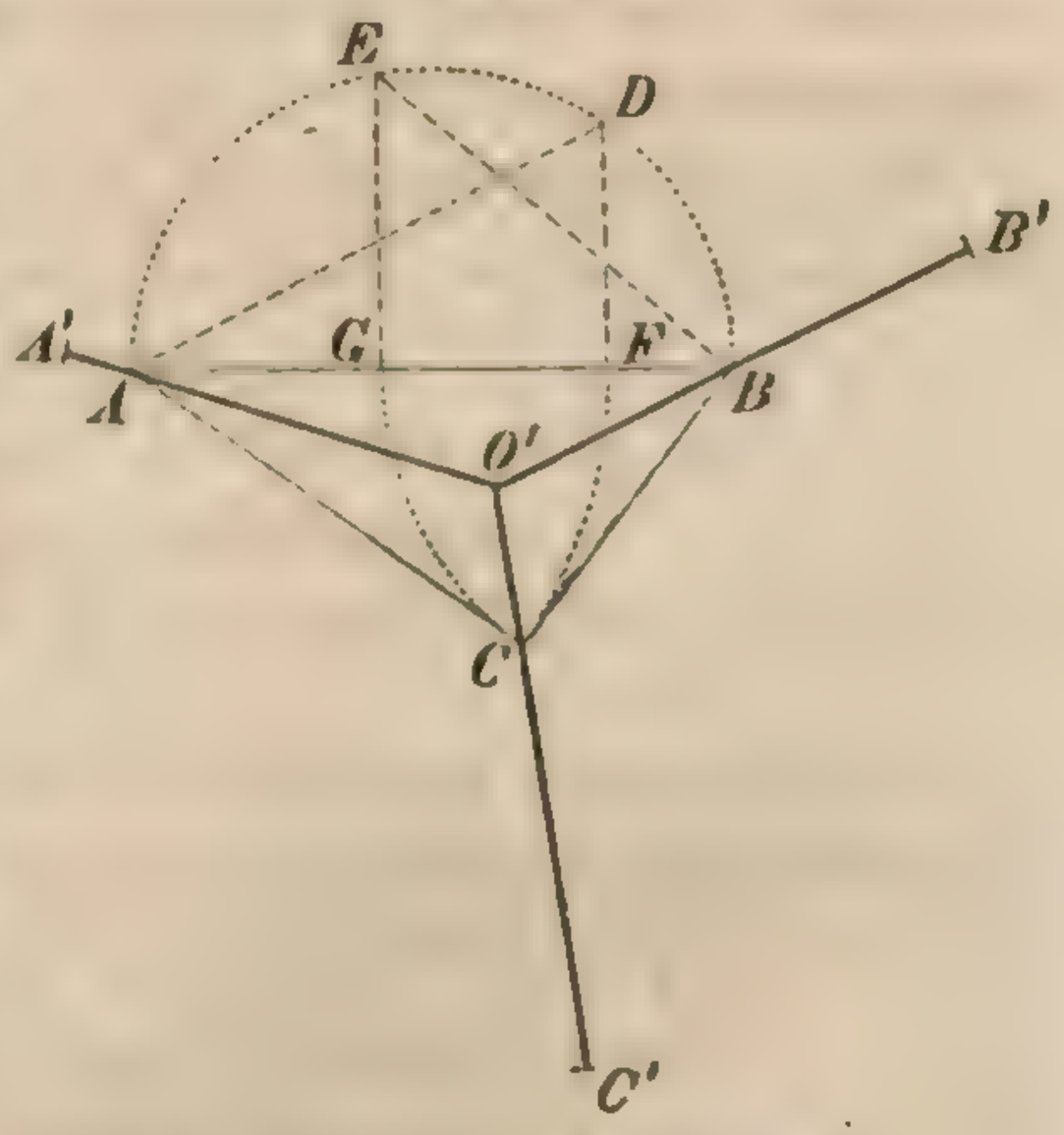
$$\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)(a'^2+b'^2-c'^2)}}{2a'b'},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)(a'^2+c'^2-b'^2)}}{2a'c'},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \frac{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)(b'^2+c'^2-a'^2)}}{2b'c'},$$

dass A, B, C die Winkel eines Dreiecks bilden, dessen Seiten a'^2, b'^2, c'^2 oder diesen Grössen proportional sind. Dies giebt folgendeConstruction: überder grössten von den Linien a', b', c', welche $c' = AB$ sein möge, beschreibe man einen Halbkreis, trage in diesen $AD = b'$ und $BE = a'$ als Sehnen ein, fälle auf AB die Senkrechten DF, EG und beschreibe aus den Seiten AB, AF, BG das Dreieck ABC. Die Seiten desselben sind

Fig. 51.



$$AB = c', \qquad AC = AF = \frac{b'^2}{c'}, \qquad BC = BG = \frac{a'^2}{c'}$$

und stehen in den Verhältnissen

$$BC : CA : AB = a'^2 : b'^2 : c'^2;$$

die Winkel des Dreiecks ABC sind folglich die vorhin mit A, B, C bezeichneten Winkel. Die Halbirungslinien derselben schneiden

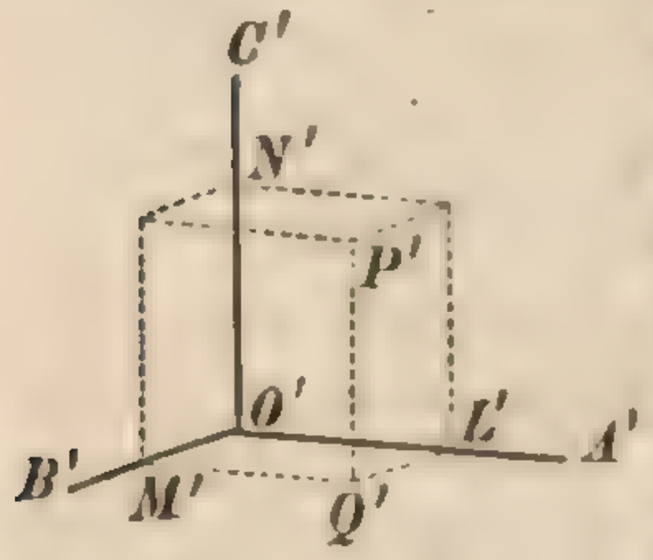
sich in einem Punkte O' und zwar ist aus naheliegenden geometrischen Gründen

$$\angle AO'B = 90^0 + \tfrac{1}{2}C, \quad \angle AO'C = 90^0 + \tfrac{1}{2}B, \quad \angle BO'C = 90^0 + \tfrac{1}{2}A;$$

trägt man also von O' aus auf die winkelhalbirenden Geraden die Strecken $O'A' = BE = a'$, $O'B' = AD = b'$ und $O'C' = AB = c'$, so hat man die drei Projectionen von d der Grösse und Lage nach*).

Sind nun die Winkel $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$ durch die erwähnte Construction oder durch die Formeln 9) bestimmt und ebenso die Winkel λ, μ, ν mittelst der Formeln 7) gefunden, so dienen die Gleichungen 2) zur Construction der Projection jedes beliebigen Punktes xyz, indem man auf der Linie $O'A'$ die Strecke $O'L' = x'$ abschneidet, durch L' die Gerade $L'Q' \parallel O'B'$ und gleich $O'M' = y'$ zieht und endlich $Q'P' = O'N' = z'$ parallel zu $O'C'$ legt, wobei man in der Praxis die Berechnung von x', y', z' durch den Gebrauch von Maassstäben umgeht, deren Einheiten sich wie $1 : \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$ verhalten. Man ist hierdurch in den Stand gesetzt, alle Ergebnisse der analytischen Geometrie in einer Ebene graphisch darzustellen.

Fig. 52.



Die gewöhnlichsten Verhältnisse sind folgende. Für $a' = b' = c'$ erhält man die sogenannte isometrische Projection, bei welcher

$$\angle(x'y') = \angle(x'z') = \angle(y'z') = 120^0,$$

$$\lambda = \mu = \nu = 35^0\ 15'\ 52''$$

$$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}8165.$$

Nimmt man zwei der Linien a', b', c' gleich und giebt der dritten

---

*) Es ist nicht ohne Interesse, das Dreieck ABC oder ein ihm ähnliches in der ursprünglichen Figur nachzuweisen. Denken wir uns OL, OM, ON bis zu ihren Durchschnitten L_0, M_0, N_0, mit der Projectionsebene verlängert, so sind L_0M_0, L_0N_0, M_0N_0, die Spuren der Ebenen LOM, LON, MON, und nach dem bekannten Satze, dass die Projection einer Geraden senkrecht auf der Spur ihrer Normalebene steht, ist $O'L' \perp M_0N_0$, $O'M' \perp L_0N_0$, $O'N' \perp L_0M_0$, mit einem Worte, die Geraden $O'L'$, $O'M'$, $O'N'$ sind die verlängerten Höhen des Spurendreiecks $L_0M_0N_0$. Nennen wir U, V, W die Fusspunkte dieser Höhen, so sind $O'L'$, $O'M'$, $O'N'$ die Winkelhalbirungslinien des Dreieckes UVW und ausserdem hat man

$$VW : UW : UV = a'^2 : b'^2 : c'^2$$

wie man durch eine leichte Rechnung findet, sobald $OL = OM = ON = d$ und $O'L' = a'$, $O'M' = b'$, $O'N' = c'$ gesetzt werden.

ein beliebiges Verhältniss zu jenen, so heisst die Projection monodimetrisch; eine sehr gewöhnliche Wahl ist

$$a' = c', \qquad b' = \tfrac{1}{2} a',$$

woraus

$$\angle (x'y') = \angle (y'z') = 131^\circ 24' 30'', \qquad \angle (x'z') = 97^\circ 11',$$
$$\lambda = \nu = 19^\circ 28', \qquad \mu = 61^\circ 52',$$
$$\cos \lambda = \cos \nu = \sqrt{\tfrac{8}{9}} = 0{,}9428, \qquad \cos \mu = \sqrt{\tfrac{2}{9}} = 0{,}4714.$$

In dem allgemeinen Falle endlich, wo die Grössen a', b', c' von einander verschieden sind, erhält man die sogenannte anisometrische Projection; passende Verhältnisse hierzu sind:

$$a' = \tfrac{9}{10} c', \qquad b' = \tfrac{1}{2} c',$$

sie geben:

$$\angle (x'y') = 157^\circ 0', \quad \angle (x'z') = 95^\circ 11', \quad \angle (y'z') = 107^\circ 49';$$
$$\lambda = 27^\circ 31', \quad \mu = 60^\circ 29', \quad \nu = 9^\circ 50',$$
$$\cos \lambda = 0{,}8868, \quad \cos \mu = 0{,}4927, \quad \cos \nu = 0{,}9853.$$

Letzteres Werthesystem empfiehlt sich besonders zum Krystallzeichnen; in der vorigen Figur sind seine Verhältnisse eingehalten.

§. 50.

Projectionen von Flächen.

Denken wir uns in einer beliebigen Ebene eine willkürlich begrenzte Figur von bekannter Fläche s gezeichnet, so können wir leicht deren Projectionen auf drei unter einander senkrechte Ebenen finden; wir wählen nämlich letztere zu Coordinatenebenen, nennen α, β, γ die Stellungswinkel der Ebene von s und bezeichnen die Projectionen von s auf die Ebenen yz, xz, xy der Reihe nach mit a, b, c; es ist dann

$$1) \qquad a = s \cos \alpha, \qquad b = s \cos \beta, \qquad c = s \cos \gamma$$

und dabei sind die Projectionen a, b, c positiv oder negativ, jenachdem die Winkel α, β, γ spitz oder stumpf ausfallen. Die Projection von s auf irgend eine vierte Ebene, welche mit der Ebene von s den Neigungswinkel ϑ bildet, ist ferner

$$p = s \cos \vartheta$$

und wenn man $\cos \vartheta$ durch die Stellungswinkel der Ebene s und durch die Stellungswinkel λ, μ, ν der neuen Ebene ausdrückt, so hat man auch

$$p = s (\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu)$$

d. i. unter Rücksicht auf die Gleichungen 1)

$$2) \qquad p = a \cos \lambda + b \cos \mu + c \cos \nu.$$

Diese bemerkenswerthe Formel giebt die Projection einer Figur auf eine beliebige Ebene, sobald die Projectionen der Figur auf die drei Coordinatenebenen bekannt sind. Hat man überhaupt verschiedene nicht in einer Ebene liegende Figuren $s_1, s_2, s_3 \ldots$, deren Projectionen auf die Coordinatenebenen

$$a_1, b_1, c_1; \qquad a_2, b_2, c_2; \qquad a_3, b_3, c_3 \text{ u. s. w.}$$

heissen mögen, so kann man die Formel 2) auf jede derselben anwenden und es ergiebt sich durch Addition aller so entstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} & p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots \\ = & (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots) \cos\lambda \\ + & (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots) \cos\mu \\ + & (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots) \cos\nu \end{aligned}$$

oder kürzer

$$3) \qquad P = A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu;$$

dabei bezeichnet A die Summe der Projectionen aller Figuren auf die Ebene yz, ebenso B die Projectionssumme auf xz, C die Projectionssumme auf xy, endlich P die Projectionssumme auf die vierte Ebene, deren Stellungswinkel λ, μ, ν sind.

Die Formel 3) wollen wir benutzen, um die vorhandenen Figuren auf drei neue unter einander senkrechte Ebenen $y'z'$, $x'z'$, $x'y'$ zu projiciren; wir haben in diesem Falle der Reihe nach zu setzen:

$$\begin{aligned} P &= A', & \lambda &= (x'x), & \mu &= (x'y), & \nu &= (x'z); \\ P &= B', & \lambda &= (y'x), & \mu &= (y'y), & \nu &= (y'z); \\ P &= C', & \lambda &= (z'x), & \mu &= (z'y), & \nu &= (z'z); \end{aligned}$$

es entstehen so folgende drei Gleichungen:

$$4) \quad \begin{cases} A' = A\cos(x'x) + B\cos(x'y) + C\cos(x'z), \\ B' = A\cos(y'x) + B\cos(y'y) + C\cos(y'z), \\ C' = A\cos(z'x) + B\cos(z'y) + C\cos(z'z). \end{cases}$$

Betrachtet man umgekehrt die Ebenen $y'z'$, $x'z'$, $x'y'$ als die primitiven und yz, xz, xy als die secundären Projectionsebenen, vertauscht also die accentuirten Buchstaben gegen die gleichnamigen nicht accentuirten, so ist entsprechend

$$5) \quad \begin{cases} A = A'\cos(xx') + B'\cos(xy') + C'\cos(xz'), \\ B = A'\cos(yx') + B'\cos(yy') + C'\cos(yz'), \\ C = A'\cos(zx') + B'\cos(zy') + C'\cos(zz'). \end{cases}$$

Zwischen den Cosinus der neun vorkommenden Winkel finden die

schon in §. 25 unter Nr. 2, 3, 5 und 6 erwähnten Beziehungen statt, mittelst welcher man sehr leicht zu der folgenden Relation gelangt

6) $$A'^2 + B'^2 + C'^2 = A^2 + B^2 + C^2;$$

hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dass die Quadratsumme der Projectionen aller Figuren auf drei unter einander senkrechte Ebenen constant bleibt, mithin von der Lage jener Ebenen unabhängig ist.

Aus Nr. 6) folgt:

7) $$C' = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - A'^2 - B'^2}$$

und hier erhält C' offenbar seinen grössten Werth für $A' = 0$ und $B' = 0$, was letzteres aus dem Grunde möglich ist, weil A' und B' Aggregate aus einzelnen Projectionen sind, die eben sowohl positiv als negativ sein können; der Ausdruck

8) $$C' = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

giebt in diesem Falle den grössten Werth an, welchen die Gesammtprojection aller Figuren auf eine Ebene $(x'y')$ überhaupt erhalten kann. Um die Lage dieser Ebene zu bestimmen, substituiren wir die Werthe $A' = 0$, $B' = 0$ in die Gleichungen 5) und bezeichnen die Stellungswinkel der Ebene $x'y'$, um die es sich nur noch handelt, kurz mit α', β', γ'; dies giebt

9) $$A = C' \cos\alpha', \quad B = C' \cos\beta', \quad C = C' \cos\gamma',$$

mit Rücksicht auf die Gleichung 8) folgen hieraus die Werthe

10) $$\begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos\beta' = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos\gamma' = \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{cases}$$

und damit ist die Stellung derjenigen Projectionsebene bestimmt, für welche die Summe der Projectionen aller gegebenen Figuren ihren Maximalwerth erreicht.

Projicirt man dieselben Figuren noch auf eine andere von der vorigen verschiedene Ebene, deren Stellungswinkel λ, μ, ν sind, so hat man wie früher

$$P = A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu$$

und durch Substitution der in Nr. 9) angegebenen Werthe

$$P = C'(\cos\alpha'\cos\lambda + \cos\beta'\cos\mu + \cos\gamma'\cos\nu)$$

oder kurz

11) $$P = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, \cos\Theta,$$

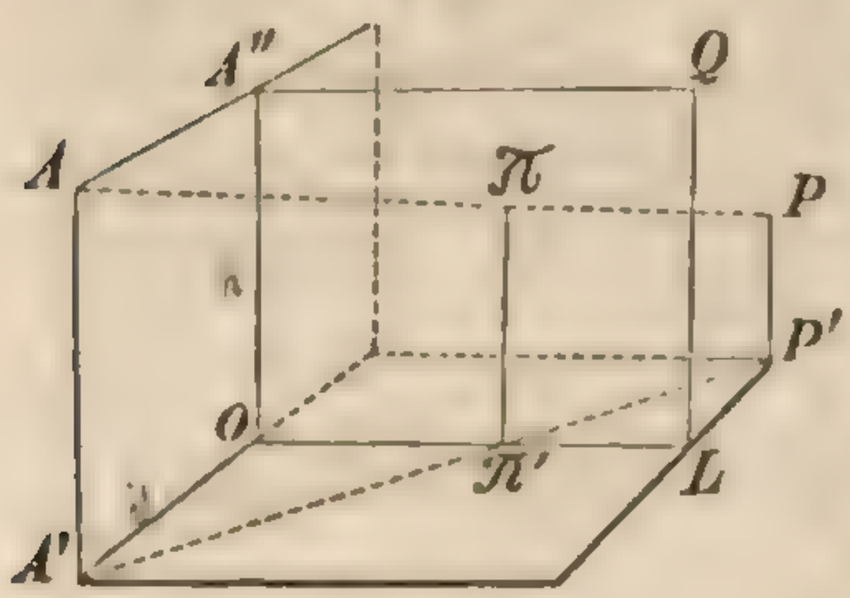
wo Θ den Neigungswinkel der beliebigen Ebene gegen die Ebene der grössten Projectionssumme bedeutet. Die Gleichung 11) lässt unmittelbar erkennen, dass die Projectionssumme P für alle Ebenen dieselbe bleibt, welche gegen die Ebene der grössten Projectionssumme denselben Neigungswinkel Θ bilden. Für $\Theta = 90^0$ wird $P = 0$, also verschwindet die Projectionssumme für alle zu jener Ebene senkrechten Ebenen.

§. 51.

Die perspectivische Projection.

Es sei eine feste Ebene OQ und vor derselben ein fester Punkt A gegeben; zieht man von diesem aus nach jeden beliebigen hinter der Ebene liegenden Punkte P eine Gerade AP, welche die Ebene in einem bestimmten Punkte Π schneidet, so heisst bekanntlich Π die perspectivische Projection von P in Beziehung auf A als Projectionscentrum. Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Lage von Π in der festen Ebene (Projectionsebene) zu finden, wenn die Lagen von A und P gegen jene Ebene bekannt sind.

Fig. 53.



Die Projectionsebene OQ sei die Ebene xz, eine durch A senkrecht zu ihr gelegte Ebene $A'AA''$ die Ebene yz; auf dem Durchschnitte beider Ebenen (der z-Achse) wählen wir den Coordinatenanfang O willkürlich und legen durch ihn die Coordinatenebene xy senkrecht zur z-Achse. In Beziehung auf dieses rechtwinklige Coordinatensystem bezeichnen wir die Coordinaten von A mit 0, $OA' = g$, $OA'' = h$, und die von P mit $OL = x$, $LP' = -y$, $P'P = z$; sind ferner ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden AP, so haben wir als Gleichungen der letzteren

1) $$\eta = -\frac{y+g}{x}\xi + g, \qquad \zeta = \frac{z-h}{x}\xi + h,$$

und daraus erhalten wir für $\eta = 0$ die Coordinaten von Π, welche $O\Pi' = \xi$, $\Pi'\Pi = \zeta$ heissen mögen. Die erste Gleichung liefert unmittelbar ξ, die zweite ζ wenn man den Werth von ξ substituirt; die resultirenden Formeln sind:

2) $$\xi = \frac{gx}{g+y}, \qquad \zeta = \frac{hy+gz}{g+y}.$$

Hieran knüpft sich von selbst die Bestimmung der Projection einer beliebigen geraden oder krummen Linie; man hat nämlich in diesem Falle zwei Gleichungen zwischen x, y, z, verbindet man sie mit den vorigen, so lassen sich x, y, z eliminiren und die übrig bleibende Gleichung zwischen ξ und ζ bestimmt die Projection der Linie. Einige Beispiele hierzu sind folgende.

Für eine Gerade im Raume hat man

3) $$y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

mithin

4) $$\xi = \frac{gx}{Bx+b+g}, \qquad \zeta = \frac{(Bh+Cg)x+bh+cg}{Bx+b+y}$$

und durch Elimination von x

5) $$[B(c-h) - C(b+g)]\,\xi + (b+g)\,\zeta = bh + cg.$$

Die perspectivische Projection einer Geraden ist demnach wieder eine Gerade, doch findet dabei die Eigenthümlichkeit statt, dass die letztere Gerade, insoweit sie wirklich durch Projection entsteht, nur eine endliche Ausdehnung erlangt, wenn auch die ursprüngliche Gerade sich hinter der Bildebene ins Unendliche erstreckt. Giebt man nämlich den Formeln 4) die Gestalt

$$\xi = \frac{g}{B + \frac{b+g}{x}}, \qquad \zeta = \frac{Bh + Cg + \frac{bh+cg}{x}}{B + \frac{b+g}{x}}$$

und lässt x ins Unendliche wachsen, so nähern sich ξ und ζ den Grenzen

6) $$\xi_\infty = \frac{g}{B}, \qquad \zeta_\infty = h + \frac{cg}{B},$$

und nun sind die endlichen Grössen ξ_∞, ζ_∞ die Coordinaten der Projection des unendlich entfernten Endpunktes der gegebenen Geraden. Da ferner in den Formeln 6) die Grössen b und c nicht mehr vorkommen, so bleiben ξ_∞ und ζ_∞ unveränderlich für alle Geraden, welche durch dieselben B und C und beliebige b, c bestimmt sind. Geometrisch heisst dies: die perspectivischen Projectionen eines Systemes paralleler Geraden vereinigen sich in einem Punkte $(\xi_\infty \zeta_\infty)$; jeder solche Punkt heisst der Fluchtpunkt des entsprechenden Parallelensystemes. — Sind z. B. die

Geraden in der xy-Ebene enthalten und senkrecht zur x-Achse, so hat man $B = tan\, 90^0 = \infty$, $C = 0$, mithin

$$\xi_\infty = 0, \qquad \zeta_\infty = h;$$

die Projectionen aller in der xy-Ebene auf der x-Achse senkrechten Geraden laufen daher im Punkte A'', dem sogenannten Augenpunkte, zusammen. Liegen zweitens die Geraden in der xy-Ebene unter einem Winkel von 45^0 gegen die x-Achse, so hat man $B = tan\, 45^0 = 1$, $C = 0$, folglich

$$\xi_\infty = g, \qquad \zeta_\infty = h;$$

der Fluchtpunkt des betreffenden Parallelensystemes befindet sich also auf der Geraden $A''Q \,//\, OL$ in der Entfernung g vom Augenpunkte; man pflegt ihn den Distanzpunkt zu nennen. Wenn drittens die Geraden die Richtung einer Würfeldiagonale haben, wie dies bei perspectivischen Schattenconstructionen vorkommt, sobald man sich die Lichtstrahlen von der Linken zur Rechten einfallend denkt, so gelten die Werthe $B = tan\, 45^0 = 1$; $C = tan\, 135^0 = -1$, woraus

$$\xi_\infty = g, \qquad \zeta_\infty = h - g.$$

Als zweite Anwendung diene die Bestimmung der perspectivischen Projection eines in der xy-Ebene liegenden Kreises. Man hat für diesen Fall

$$7) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \qquad z = 0;$$

aus den Formeln 2) erhält man wegen $z = 0$

$$x = \frac{h\xi}{h-\zeta}, \qquad y = \frac{g\zeta}{h-\xi}$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in die Kreisgleichung

$$8) \begin{cases} h^2\xi^2 + [a^2 + (b+g)^2 - r^2]\zeta^2 + 2ah\xi\zeta \\ -2ah^2\xi - 2[a^2 + b(b+g) - r^2]h\zeta + (a^2 + b^2 - r^2)h^2 = 0. \end{cases}$$

Der blosse Anblick dieser Gleichung lehrt, dass die Projection im Allgemeinen ein Kegelschnitt ist und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem $b + g$ grösser, gleich oder kleiner als r ist. Für die Coordinaten des Mittelpunktes der Projection findet man leicht:

$$p = \frac{a(b+g)g}{(b+g)^2 - r^2}, \qquad q = \frac{[b(b+g) - r^2]h}{(b+g)^2 - r^2};$$

bezeichnet ferner ω den Winkel, welchen irgend eine der Hauptachsen mit der x-Achse einschliesst, so erhält man:

$$tan\, 2\omega = \frac{2ah}{h^2 - [a^2 + (b+g)^2 - r^2]}.$$

Dieser Ausdruck ist leicht zu construiren; bildet man nämlich aus den drei Seiten

$$a, \qquad \sqrt{(b+g)^2 - r^2}, \qquad h$$

ein Dreieck und errichtet die zur Seite a gehörende Höhe, so theilt letztere die Seite a in zwei Theile und zwar ist der an der Seite $\sqrt{(b+g)^2 - r^2}$ liegende Abschnitt

$$k = \frac{a^2 + (b+g)^2 - r^2 - h^2}{2a}$$

mithin

$$tan\, 2\omega = -\frac{h}{k},$$

woraus eine einfache Construction für ω folgt.

Soll die Projection zu einem Kreise werden, so muss der Coefficient von $\xi\zeta$ verschwinden und der Coefficient von ξ^2 gleich dem von ζ^2 sein; diese Bedingungen lauten:

$$a = 0, \qquad h^2 = (g+b)^2 - r^2.$$

Die erste giebt zu erkennen, dass der Mittelpunkt des Kreises in einer Verticalebene (yz) mit dem Projectionscentrum liegen muss, die zweite Bedingung enthält, wenn man sich g und h als veränderlich denkt, den bemerkenswerthen Satz, dass alle Projectionscentra, von welchen aus gesehen der gegebene Kreis wiederum als Kreis erscheint, auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen, deren Halbachse r und deren Scheitel der Coordinatenanfang ist.

Wir haben endlich noch zu erörtern, was man unter der perspectivischen Projection einer Fläche verstehen soll. Denkt man sich von dem Projectionscentrum aus an die Fläche alle möglichen Tangenten gezogen, so bilden diese in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine Kegelfläche; letztere wird von der Projectionsebene in einer bestimmten Curve geschnitten und diese muss nun als perspectivische Abbildung der ursprünglichen Fläche gelten. — Um hiervon eine Anwendung auf die Projection der Kugelfläche zu machen, sei

$$(x-a)^2 + (y+b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

die Gleichung dieser Fläche; irgend eine durch das Projectionscentrum gehende Gerade wird durch die Gleichungen

$$9) \qquad \eta = P\xi + g, \qquad \zeta = Q\xi + h$$

ausgedrückt und berührt die Kugelfläche, wenn die Bedingung

$$10) \quad \begin{cases} (1 + P^2 + Q^2)\, r^2 \\ = (Pa + g + b)^2 + (Qa + h - c)^2 + [P(h-c) - Q(g+b)]^2 \end{cases}$$

erfüllt ist, wie man am leichtesten mittelst der Bemerkung findet, dass der Abstand einer Tangente vom Kugelmittelpunkte jederzeit dem Kugelhalbmesser gleich sein muss. Eliminirt man P und Q aus den beiden letzten Gleichungen, indem man die Werthe

$$P = \frac{\eta - g}{\xi}, \qquad Q = \frac{\zeta - h}{\xi}$$

in Nr. 10) einsetzt, so charakterisirt die neue Gleichung

$$11) \quad \left\{ \begin{array}{c} [\xi^2 + (\eta - g)^2 + (\zeta - h)^2]\, r^2 \\ = [a(\eta - g) + (g + b)\xi]^2 + [a(\zeta - h) + (h - c)\xi]^2 \\ + [(h - c)(\eta - g) - (g + b)(\zeta - h)]^2 \end{array} \right.$$

diejenige Kegelfläche, welche ihren Mittelpunkt im Projectionscentrum hat und ausserdem die gegebene Kugel berührt (die projicirende Kegelfläche). Die Gleichung der Kugelprojection ergiebt sich hieraus für $\eta = 0$, nämlich

$$12) \quad \left\{ \begin{array}{c} r^2 [\xi^2 + g^2 + \zeta^2] \\ = [-ag + (g + b)\xi]^2 + [a(\zeta - h) + (h - c)\xi]^2 \\ + [g(h - c) + (g + b)(\zeta - h)]^2, \end{array} \right.$$

und diese Gleichung lässt erkennen, dass die Projection der Kugelfläche im Allgemeinen eine Ellipse ist, welche nur in dem speciellen Falle $a = 0$ und $c = h$ zu einem Kreise werden kann.

Verbesserungen.

S. 25 Formel 7) statt $\frac{f_3 - f_1}{f_3 - f_1}$ lies $\frac{f_3 - f_1}{f_3 - f_2}$,
„ 41 Z. 16 v. u. statt wir lies wie.
„ 68 „ 9 v. o. statt Gerade lies Ebene.
„ 111 Formel 5) statt $\psi(x_1, z_1)$ lies $\psi(y_1, z_1)$.
„ 216 Fig. 45 statt P lies P_0.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

PROSPECTUS.

LEHRBUCH

DER

ANALYTISCHEN MECHANIK

VON

DUHAMEL,

Mitglied der Academie der Wissenschaften in Paris.

DEUTSCH

VON

Dr. H. EGGERS.

REVIDIRT, MIT ZUSÄTZEN UND VORWORT BEGLEITET

VON

Dr. OSKAR SCHLÖMILCH,

Professor der höheren Mathematik und analytischen Mechanik an der polytechnischen Schule in Dresden.

MIT VIELEN HOLZSCHNITTEN.

Zwei Bände in acht Lieferungen à 9 Ngr.

Nach dem Urtheile der gewichtigsten Autoritäten ist *Duhamel's Cours de mécanique de l'école polytechnique* in seiner Art das vollständigste und zugleich in seiner Behandlungsweise das eleganteste Lehrbuch der analytischen Mechanik, welches die Literatur überhaupt besitzt, so dass dasselbe schon seit Jahren den Vorlesungen und dem Unterrichte auf deutschen Universitäten und höheren technischen Bildungsanstalten im Original zu Grunde gelegt wird.

Die unterzeichnete Verlagshandlung glaubt desshalb einem entschiedenen Bedürfnisse zu begegnen, wenn sie eine deutsche Ausgabe veranstaltet und zwar in einer Bearbeitung, welche sowohl eine sorgfältige und elegante Uebersetzung bietet, als auch das schon im Jahr 1845 erschienene Original, wo es nöthig ist, ergänzt und berichtigt.

Da nämlich das Publikum schon allzuoft und noch in neuester Zeit durch Uebersetzungen, die an Gallicismen, Stylfehlern und Missverständnissen aller Art laboriren, bitter getäuscht wurde, so hielt es die Verlagshandlung für nöthig, für die Gediegenheit der Bearbeitung von vornherein die vollständigsten Garantieen zu bieten; sie ersuchte desshalb und weil der Uebersetzer, Herr Dr. Eggers, durch eine Reise ins Ausland verhindert war, an sein Manuscript die letzte Hand zu legen, Hrn. Prof. Dr. Schlömilch in Dresden um seine thätige Mitwirkung bei der Herausgabe des Werkes.

Derselbe hat im Interesse der Sache diesem Wunsche auf das bereitwilligste entsprochen und nicht bloss eine gründliche Revision des Manuscripts durch vollständige Vergleichung mit dem Original vorgenommen und dabei Gelegenheit gefunden, die hie und da nothwendigen Ergänzungen einzuschalten, sondern auch die typographische Ausführung zur Erzielung vollständiger Correctheit auf das sorgfältigste überwacht.

Das Publikum wird gleich mir dem Herrn Prof. Schlömilch für diese mühsame und zeitraubende Arbeit um so mehr dankbar sein können, als es in dieser Weise ein Werk erhält, welches sowohl hinsichtlich der richtigen Verdeutschung des Originals und dessen Ergänzung und Berichtigung nach dem neuesten Standpunkt der Wissenschaft, als auch bezüglich der Klarheit und Eleganz des Styls nichts zu wünschen übrig lassen dürfte.

Das ganze Werk wird in 8 Lieferungen erscheinen, welche rasch auf einander folgen werden, da der Druck bereits weit vorgeschritten ist und das Manuscript vollständig vorliegt.

Jede Lieferung kostet 9 Ngr. und bei 6 auf einmal bezogenen Exemplaren ist jede Buchhandlung in den Stand gesetzt, ein Freiexemplar zu gewähren. Ein ausführliches Vorwort des Herrn Prof. Schlömilch wird mit der letzten Lieferung nachfolgen.

Leipzig, im April 1853. **B. G. Teubner.**

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Fort, Osmar / Fort, Osmar, / Schlömilch, Oskar,

Lehrbuch der analytischen Geometrie

Bd.: 2

Leipzig 1855

Math.p. 153 I-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081801-0